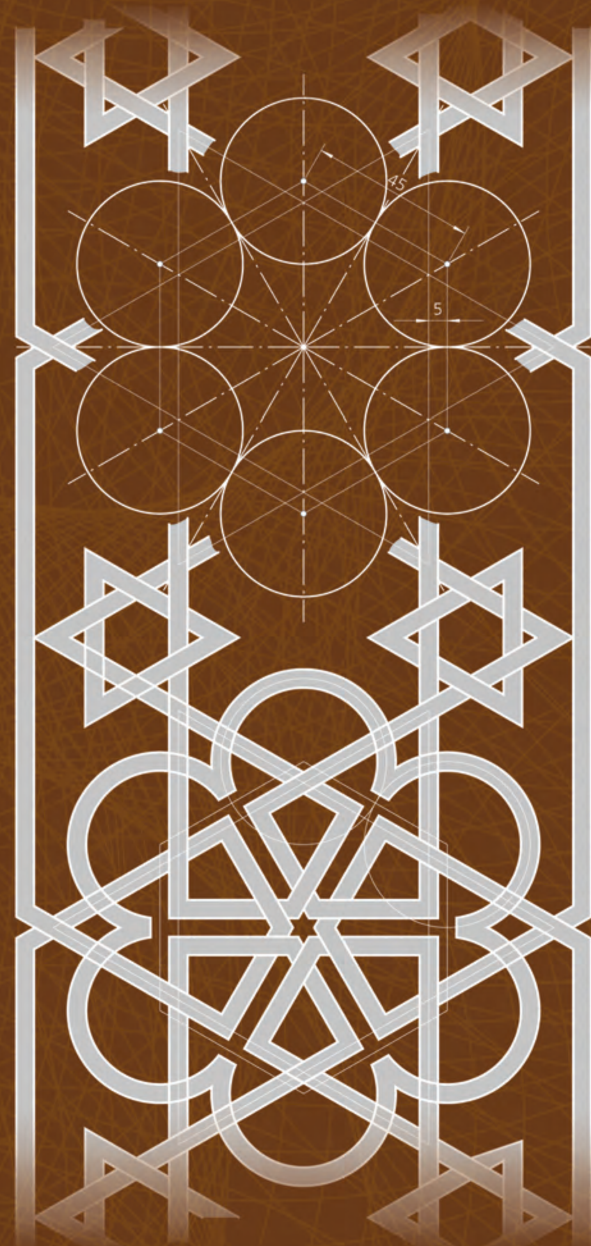
II

geometría métrica aplicada



3 TRAZADOS FUNDAMENTALES EN EL PLANO

3 TRAZADOS FUNDAMENTALES EN EL PLANO

OBJETIVOS

1 *Realizar los trazados geométricos básicos en el plano, con segmentos racionales e irracionales, aplicando los fundamentos teóricos en que se basan.*

2 *Obtener y realizar operaciones con ángulos utilizando la escuadra, el cartabón y el compás.*

3 *Determinar, gráficamente, distancias entre elementos geométricos al mismo tiempo que se definen lugares geométricos compuestos por puntos.*

1 ELEMENTOS BÁSICOS

1.1 Punto.

Elemento geométrico adimensional sin otra propiedad que la de su ubicación como lugar geométrico de la intersección de dos líneas. Es el origen de una semirrecta o el centro de un círculo diminuto. Se designa con letras mayúsculas: *A*, *B*, *C*...

1.2 Línea.

La línea es el elemento geométrico engendrado por el desplazamiento de un punto; tiene longitud pero no grosor. Puede ser:

- ***Recta.*** Es la sucesión de puntos en una misma dirección. No tiene principio ni fin. Se nombra con letras minúsculas: *r*, *s*, *t*...
- ***Semirrecta.*** Es la parte de recta limitada en un extremo. Tiene principio, pero no fin.
- ***Segmento.*** Parte de recta limitada por sus extremos. Tiene principio y fin. Se nombra por los puntos de sus extremos (segmento $\overline{AB}$) o por una letra minúscula (*s*) situada en su centro.
- ***Curva.*** Es la línea cuyos puntos no siguen una misma dirección.
- ***Poligonal o quebrada.*** Es la compuesta por segmentos unidos por los extremos y en distintas direcciones. Los segmentos se llaman *lados* y los puntos comunes a dos lados consecutivos se denominan *vértices*.

1.3 Rectas: situación y posiciones relativas.

- ***Recta horizontal.*** Línea recta que coincide con la del horizonte: todos sus puntos se encuentran a igual altura.
- ***Recta vertical.*** Aquélla que sigue la dirección de todos los cuerpos al caer, la de la plomada. Es perpendicular al plano horizontal.
- ***Recta inclinada u oblicua.*** Aquélla que no sea horizontal ni vertical.
- ***Rectas paralelas.*** Rectas que siguen la misma dirección. Aunque se prolonguen, nunca llegan a cortarse. Su separación es constante.
- ***Rectas concurrentes.*** No son rectas paralelas; por ello, se cortan en un punto.
- ***Rectas perpendiculares.*** Rectas que, cuando se cortan, dividen al plano en cuatro ángulos rectos (*90°*).

1.4 Operaciones básicas con segmentos.

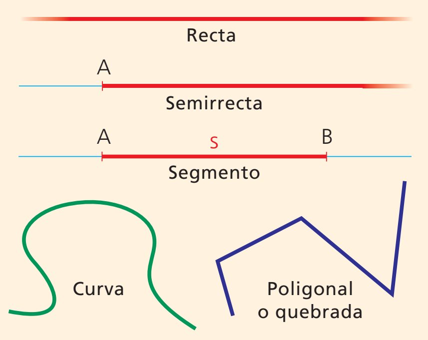
1.4.1 Suma de dos segmentos *m* y *n*.

A partir de una semirrecta se transportan los segmentos dados –con ayuda del compás– uno seguido de otro: $\overline{AD} = \overline{AB} + \overline{CD} = m + n$.

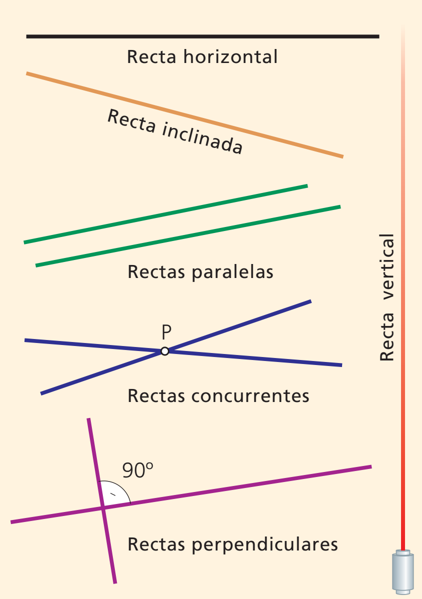
1.4.2 Diferencia entre dos segmentos *m* y *n*.

Se transporta sobre el segmento $\overline{AB} = m$, el segmento $\overline{CD} = n$; tal que $\overline{AC} = m - n$.

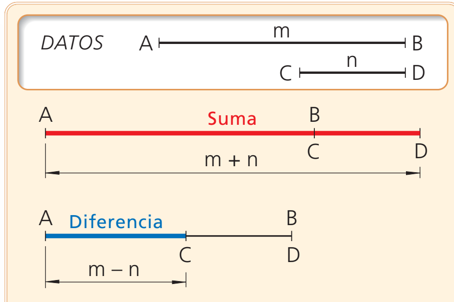
1.1 El punto y sus representaciones.



1.2 Tipos de líneas.



1.3 Rectas: situación y posiciones relativas.



1.4 Suma y diferencia de segmentos.

2 ÁNGULO

2.1 Definición y tipos.

Se denomina *ángulo* a la parte del plano comprendido entre dos semirrectas, con el mismo origen (vértice). Los ángulos se designan por la letra de su vértice (*V*) o por una letra griega (***α***). Son positivos cuando se miden en sentido opuesto al giro de las agujas del reloj; en caso contrario, son negativos.

Los ángulos se miden en grados sexagesimales. Cada grado tiene *60* minutos y cada minuto *60* segundos. Según su abertura, los ángulos se clasifican en:

- ***Ángulo recto.*** Igual a *90°*.
- ***Ángulo agudo.*** Menor de *90°*.
- ***Ángulo obtuso.*** Mayor de *90°*.
- ***Ángulo llano.*** Igual a *180°*.

2.2 Posiciones relativas.

Si nos atenemos a la posición que tienen entre ellos, dos ángulos pueden ser:

- ***Ángulos consecutivos.*** Son los que tienen el mismo vértice y un lado común. También se denominan *contiguos*.
- ***Ángulos adyacentes.*** Son aquellos ángulos consecutivos cuyos lados no comunes están en línea recta. Su suma vale dos rectos (*180°*).
- ***Ángulos opuestos por el vértice.*** Aquéllos en que cada uno está formado por la prolongación de los lados del otro. Los ángulos opuestos por el vértice son iguales.
- ***Ángulos complementarios.*** Aquéllos que sumados valen un recto (*90°*).
- ***Ángulos suplementarios.*** Los que sumados valen un llano; es decir, dos rectos (*180°*).

2.3 Transporte de un ángulo.

Dado que a todo arco de circunferencia de igual radio le corresponde una misma cuerda, para transportar un ángulo de vértice *V* a otro lugar con vértice *O*, se traza un mismo arco de radio *r* y, con el compás, se traslada la cuerda *s* correspondiente. Finalmente, se une el vértice *O* con el punto *N* resultante.

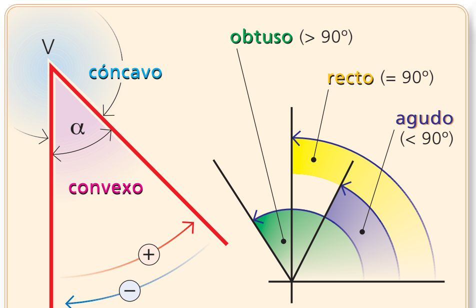
2.4 Operaciones básicas con ángulos.

2.4.1 Suma de dos ángulos ($\alpha + \beta$).

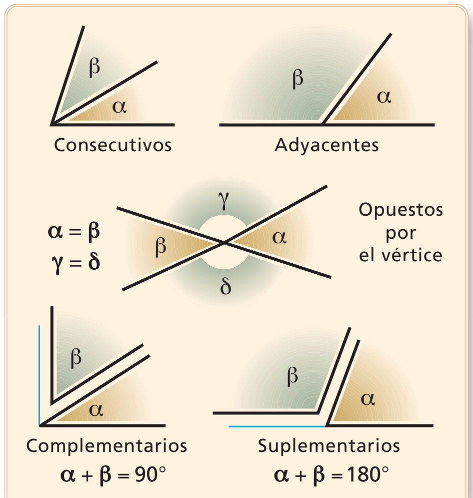
A partir de la semirrecta *SA*, y con origen en *S*, se transporta el ángulo ***α*** y, a continuación, (como ángulos consecutivos) el ángulo ***β***.

2.4.2 Diferencia de ángulos ($\alpha - \beta$).

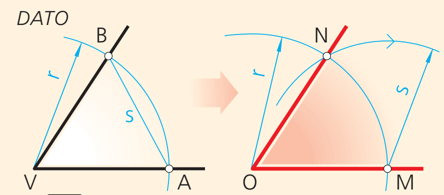
A partir de la semirrecta *DB* y con origen en *D*, se construye el ángulo mayor (***α***); a continuación se superpone el ángulo menor (***β***) para obtener su diferencia ($\alpha - \beta$).



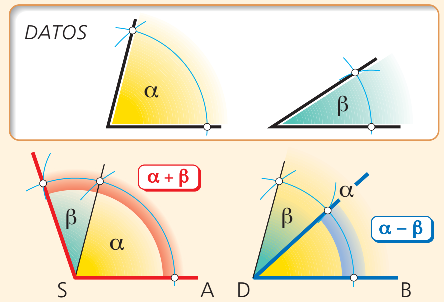
2.1 Ángulos y tipos.



2.2 Posiciones relativas entre ángulos.

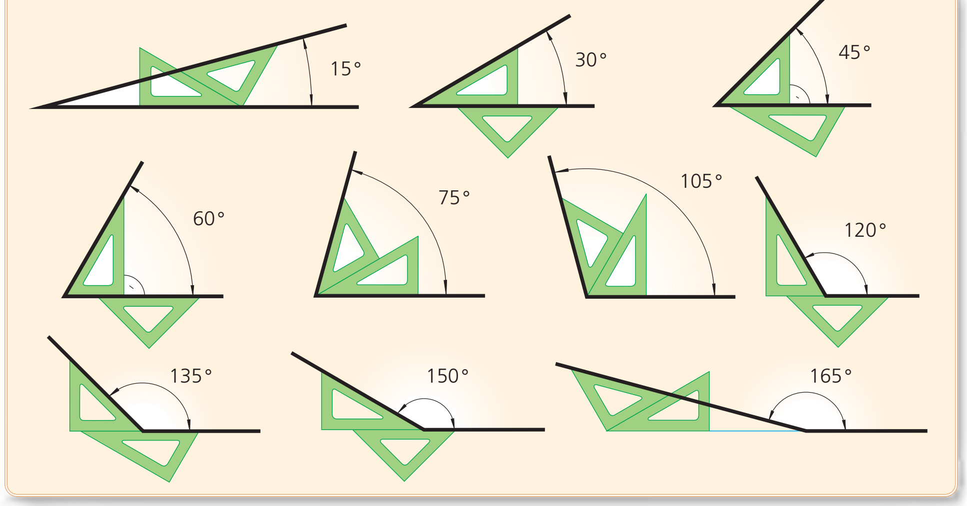


2.3 Transporte de un ángulo.



2.4 Suma y diferencia de ángulos.

CONSTRUCCIÓN DE ÁNGULOS CON LAS PLANTILLAS



3 DISTANCIAS

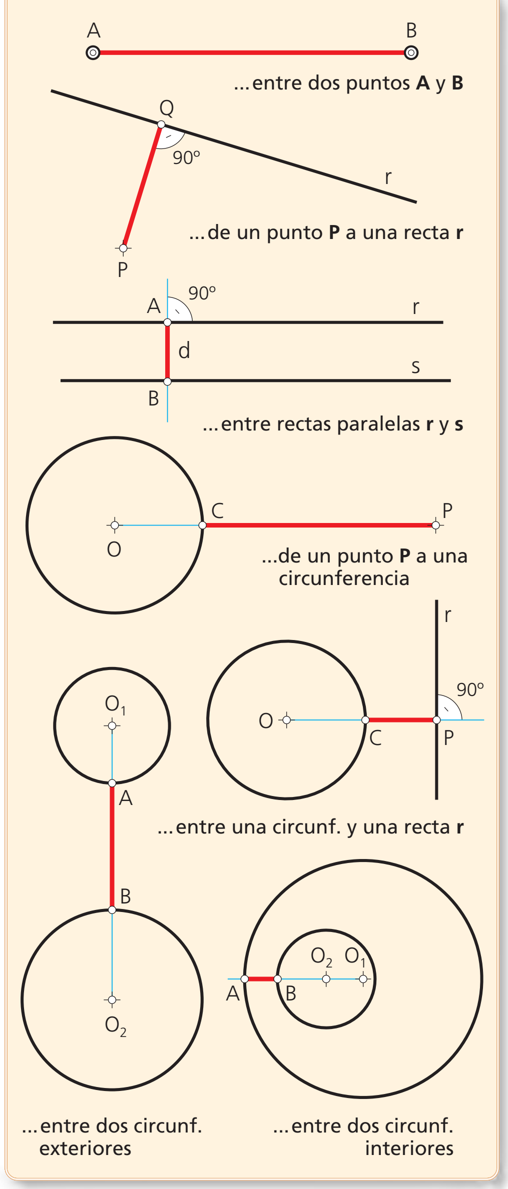
*Se denomina **distancia** a la longitud más corta entre dos elementos geométricos (puntos, rectas, planos, figuras, etc.).*

De todas las distancias más comunes entre elementos geométricos simples, destacamos las siguientes:

- ***Entre dos puntos A y B.*** Queda determinada por la magnitud del segmento $\overline{AB}$ que los une.
- ***De un punto P a una recta r.*** Es la longitud del segmento $\overline{PQ}$ que resulta de trazar desde el punto *P* la perpendicular a la recta *r*.
- ***Entre dos rectas paralelas r y s.*** Es la longitud del segmento $\overline{AB}$ que determina una recta perpendicular a ambas.
- ***De un punto P a una circunferencia.*** Es la longitud del segmento $\overline{PC}$ que resulta de unir el punto *P* con el centro *O* de la circunferencia.
- ***Entre una circunferencia y una recta r exterior a ella.*** Viene determinada por el segmento $\overline{PC}$ resultante de trazar, desde el centro *O* de la circunferencia, la perpendicular a la recta *r*.
- ***Entre dos circunferencias exteriores.*** Es la definida por el segmento $\overline{AB}$ situado sobre la recta que une los centros de ambas circunferencias.
- ***Entre dos circunferencias interiores.*** Es la mínima longitud definida por el segmento $\overline{AB}$ situado sobre la recta que une los centros de ambas.

Como caso particular hemos de considerar aquél en el que las circunferencias son concéntricas; en ese caso, la anchura de la *corona circular* viene dada por la distancia entre ambas circunferencias: la diferencia entre sus radios.

DISTANCIA...



4 LUGARES GEOMÉTRICOS

*Los lugares geométricos se definen como el conjunto de **puntos**, de **rectas** o de **planos** que cumplen, poseen, o se agrupan en una propiedad común.*

El método de investigación de la naturaleza de un lugar geométrico *(l.g.)* se basa en localizar puntos que pertenezcan al lugar. La posición relativa de estos puntos indicará claramente si se trata de una recta o de una curva.

Por el momento nos ocuparemos de aquellos lugares geométricos formados por *puntos* y que, por su protagonismo y frecuente aparición en la estructura de las formas geométricas básicas, merecen atención prioritaria.

4.1 Mediatriz de un segmento.

Es el l.g. de los puntos del plano equidistantes de los extremos del segmento $\overline{AB}$ dado.

Dicha mediatriz es la recta *m* perpendicular al segmento $\overline{AB}$ en su punto medio *M*.

- *Trazado:* con centro en los extremos del segmento $\overline{AB}$ considerado, se trazan arcos del mismo radio que se cortan en dos puntos *P* y *Q*. Su unión determina la recta *mediatriz*.

4.2 Paralela media: mediana.

El lugar geométrico de los puntos equidistantes de dos rectas paralelas es la mediatriz *n* del segmento que tiene por extremos los puntos *A* y *B*; es, en definitiva, la ***paralela media*** de las rectas consideradas. Así, en una autovía, la ***mediana*** es la línea que separa los dos sentidos de circulación.

4.3 Bisectriz de un ángulo.

Es el l.g. de los puntos del plano equidistantes de los lados del ángulo. Es la semirrecta que divide el ángulo en dos partes iguales.

4.3.1 Trazado si el vértice está localizado.

Con centro en el vértice *V* se dibuja un arco cualquiera que corta a los lados en *A* y *B*. Con centro en ellos, se trazan dos arcos, del mismo radio, consiguiendo el punto *P*. La unión de *P* con *V* determina la recta *bisectriz*.

4.3.2 Trazado si el vértice no está localizado.

Sean las rectas *a* y *b* los lados del ángulo considerado. Se comienza por trazar dos rectas paralelas y equidistantes a dichos lados para obtener el punto de corte *P*. La bisectriz del ángulo queda definida al trazar por *P* la perpendicular al segmento $\overline{AB}$.

4.4 Circunferencia

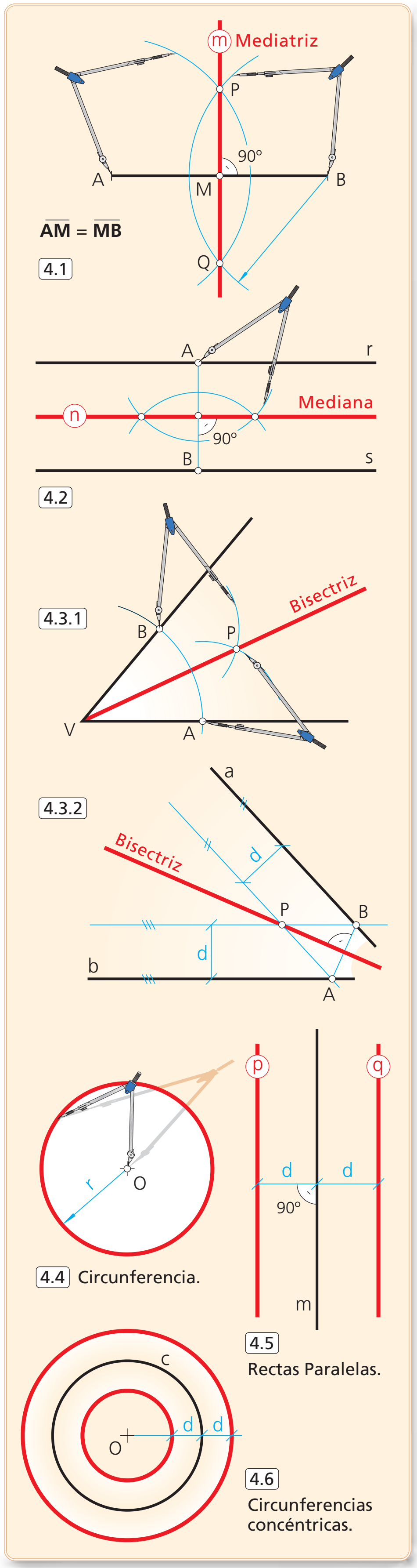
Es el lugar geométrico de los puntos del plano equidistantes (una determinada magnitud *r)* de un punto fijo *O* llamado *centro*.

4.5 Rectas paralelas.

El lugar geométrico de los puntos del plano equidistantes (una magnitud *d)* de una recta *m* dada, son dos rectas *p* y *q*, paralelas a ella.

4.6 Circunferencias concéntricas.

El l.g. de los puntos del plano equidistantes una magnitud ***d*** de una circunferencia ***c***, son dos circunferencias concéntricas a esta.



OPERACIONES GRÁFICAS CON SEGMENTOS

1. Traza, gráficamente, los siguientes **SEGMENTOS**:
1.- **a+b** ; 2.- **a+c−b** ; 3.- **3a** ; 4.- **b−a+c** .

2. Determina, gráficamente, el **SEGMENTO**: **s** / (**3**/**5**) .

3. Determina, gráficamente, el **SEGMENTO**: $(\sqrt{5}+1)\cdot m/2$.

4. Determina, gráficamente, el **SEGMENTO**: $(2/\sqrt{3})\cdot n$.

nombre y apellidos

nº | curso/grupo | fecha

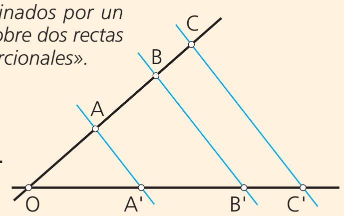
PROPORCIONALIDAD DIRECTA

TEOREMA DE THALES...

«Los segmentos determinados por un haz de rectas paralelas sobre dos rectas que se cortan son proporcionales».

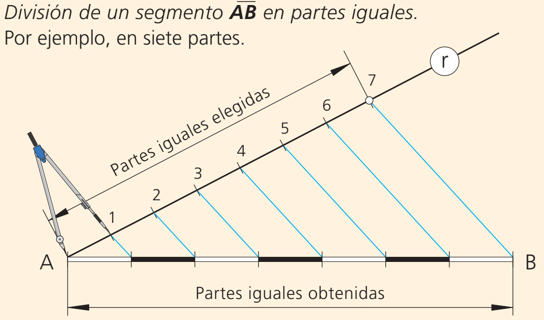
Esto es:

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OA'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \text{cte.}$$



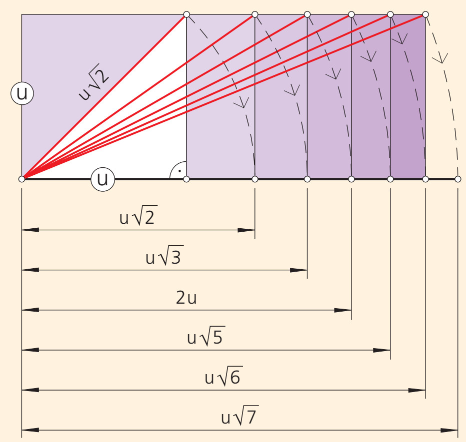
...Y SU APLICACIÓN PRÁCTICA

División de un segmento $\overline{AB}$ en partes iguales.
Por ejemplo, en siete partes.



Trazado:
A partir del extremo **A** se marcan **7** unidades iguales a lo largo de la semirrecta **r** de origen en **A** e inclinación arbitraria. Seguidamente, se une la última división (7) con el extremo **B** del segmento dado: las paralelas a ésta, por las divisiones anteriores, determinan la división del segmento $\overline{AB}$ en siete partes iguales.

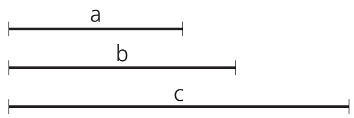
SEGMENTOS IRRACIONALES



Para obtener gráficamente las dimensiones correspondientes a $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, ..., se parte de construir un triángulo rectángulo de catetos la unidad (**u**). Su hipotenusa valdrá $\sqrt{2}$.

Girando esta magnitud ($u\sqrt{2}$) sobre la horizontal se consigue un rectángulo de lados $u\sqrt{2}$ y **u** respectivamente, cuya diagonal valdrá $u\sqrt{3}$. De análoga forma se pueden ir obteniendo, sistemáticamente, rectángulos de proporciones irracionales: $u\sqrt{4} = 2u$, $u\sqrt{5}$, $u\sqrt{6}$, $u\sqrt{7}$, etc.

1 *DATOS:*



1

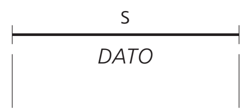
2

3

4

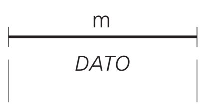
2 *OPERACIÓN:*

$$\frac{s}{3/5} = \frac{5s}{3} = \mathbf{5}\,\frac{\mathbf{s}}{\mathbf{3}}$$



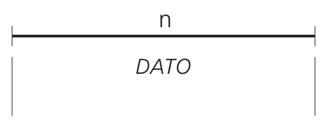
3 *OPERACIÓN:*

$$\frac{\sqrt{5}+1}{2}\,m = \left(\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2}\right) m = \frac{\sqrt{\mathbf{5}}}{\mathbf{2}}\,\mathbf{m} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\,\mathbf{m}$$



4 *OPERACIÓN:*

$$\frac{2}{\sqrt{3}}\,n = \frac{2\sqrt{3}}{3}\,n = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\sqrt{\mathbf{3}}\,\mathbf{n}$$



OPERACIONES GRÁFICAS CON SEGMENTOS

nombre y apellidos

nº | curso/grupo | fecha

1. Traza, gráficamente, los siguientes **SEGMENTOS**:
1.- **a+b** ; 2.- **a+c−b** ; 3.- **3a** ; 4.- **b−a+c** .

2. Determina, gráficamente, el **SEGMENTO**: **s / (3/5)**.

3. Determina, gráficamente, el **SEGMENTO**: $(\sqrt{5}+1)\cdot m/2$.

4. Determina, gráficamente, el **SEGMENTO**: $(2/\sqrt{3})\cdot n$.

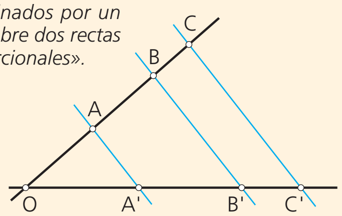
PROPORCIONALIDAD DIRECTA

TEOREMA DE THALES...

«Los segmentos determinados por un haz de rectas paralelas sobre dos rectas que se cortan son proporcionales».

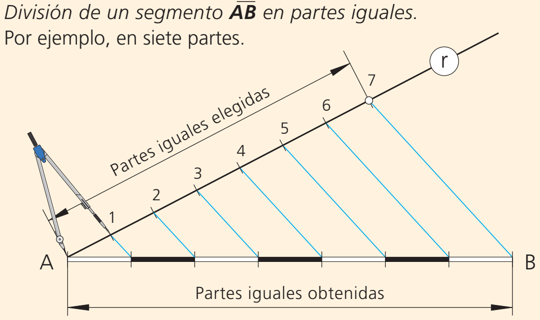
Esto es:

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OA'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \text{cte.}$$



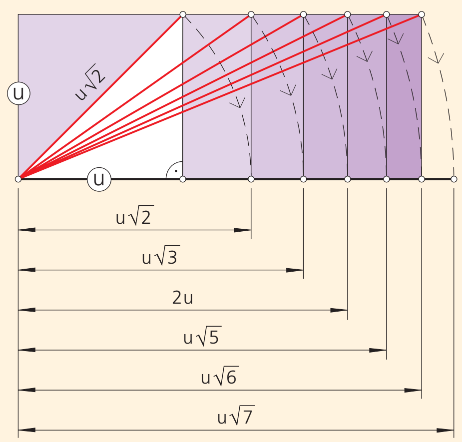
...Y SU APLICACIÓN PRÁCTICA

*División de un segmento **AB** en partes iguales.*
Por ejemplo, en siete partes.



Trazado:
A partir del extremo **A** se marcan **7** unidades iguales a lo largo de la semirrecta **r** de origen en **A** e inclinación arbitraria. Seguidamente, se une la última división (7) con el extremo **B** del segmento dado: las paralelas a ésta, por las divisiones anteriores, determinan la división del segmento **AB** en siete partes iguales.

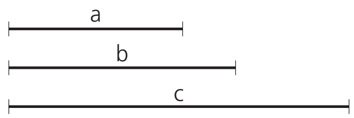
SEGMENTOS IRRACIONALES

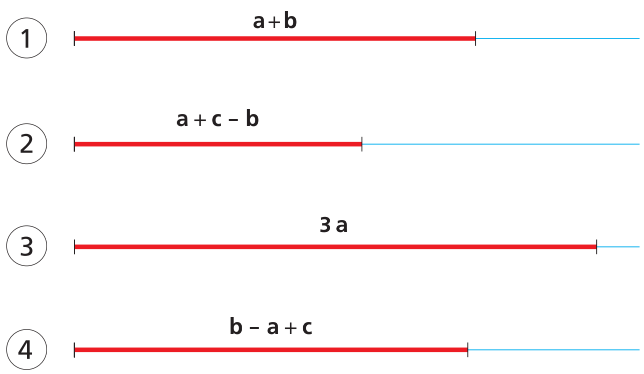


Para obtener gráficamente las dimensiones correspondientes a $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, ..., se parte de construir un triángulo rectángulo de catetos la unidad (**u**). Su hipotenusa valdrá $\sqrt{2}$.

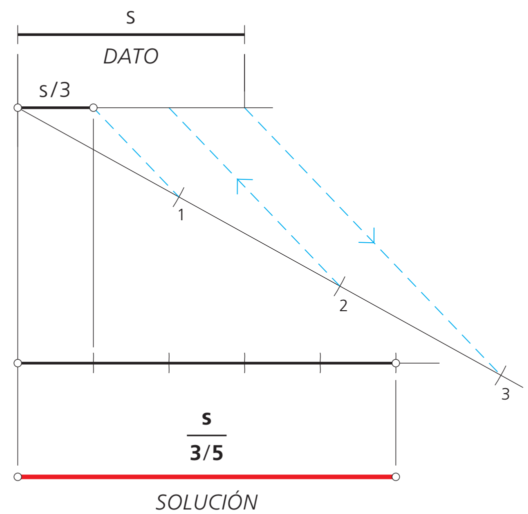
Girando esta magnitud ($u\sqrt{2}$) sobre la horizontal se consigue un rectángulo de lados $u\sqrt{2}$ y **u** respectivamente, cuya diagonal valdrá $u\sqrt{3}$. De análoga forma se pueden ir obteniendo, sistemáticamente, rectángulos de proporciones irracionales: $u\sqrt{4} = 2u$, $u\sqrt{5}$, $u\sqrt{6}$, $u\sqrt{7}$, etc.

1 *DATOS:*



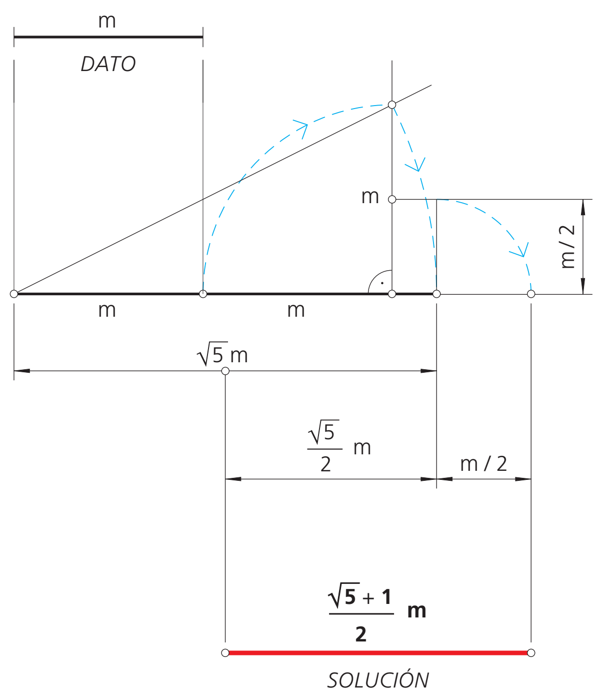


2 *OPERACIÓN:* $\dfrac{s}{3/5} = \dfrac{5\,s}{3} = 5\,\dfrac{\mathbf{s}}{\mathbf{3}}$

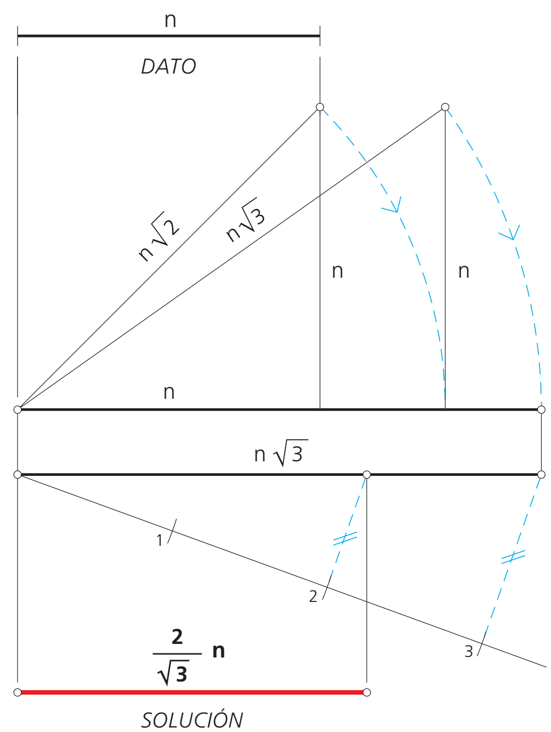


3 *OPERACIÓN:*

$$\frac{\sqrt{5}+1}{2}\,m = \left(\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2}\right) m = \frac{\sqrt{5}}{2}\,m + \frac{1}{2}\,m$$



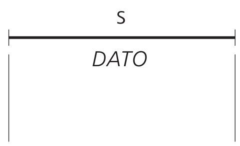
4 *OPERACIÓN:* $\dfrac{2}{\sqrt{3}}\,n = \dfrac{2\,\sqrt{3}}{3}\,n = \dfrac{2}{3}\sqrt{3}\,n$



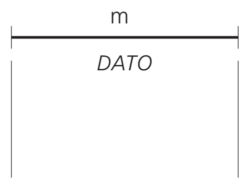
VERIFICACIONES

1. Determinar, gráficamente, el **SEGMENTO $s/\sqrt{7}$**, siendo **s = 30** mm.
2. Determinar, gráficamente, el **SEGMENTO $m/(\sqrt{5}+1)/2$**, siendo **m = 30** mm.

1 *OPERACIÓN:* $\frac{s}{\sqrt{7}} = \frac{s\sqrt{7}}{7} = \mathbf{\frac{1}{7}\, s\sqrt{7}}$



2 *OPERACIÓN:* $\frac{m}{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} = \frac{2m}{\sqrt{5}+1} = \frac{(\sqrt{5}-1)\,2m}{5-1} = \mathbf{\frac{(\sqrt{5}m - m)}{2}}$

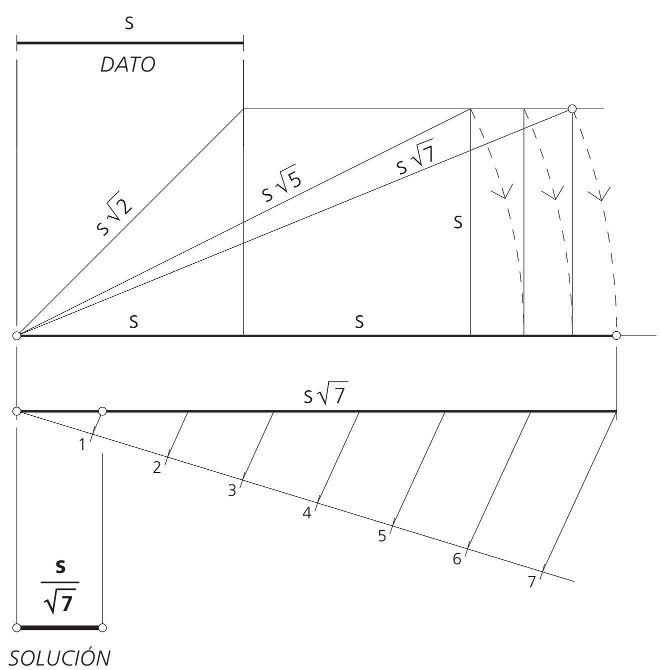


VERIFICACIONES

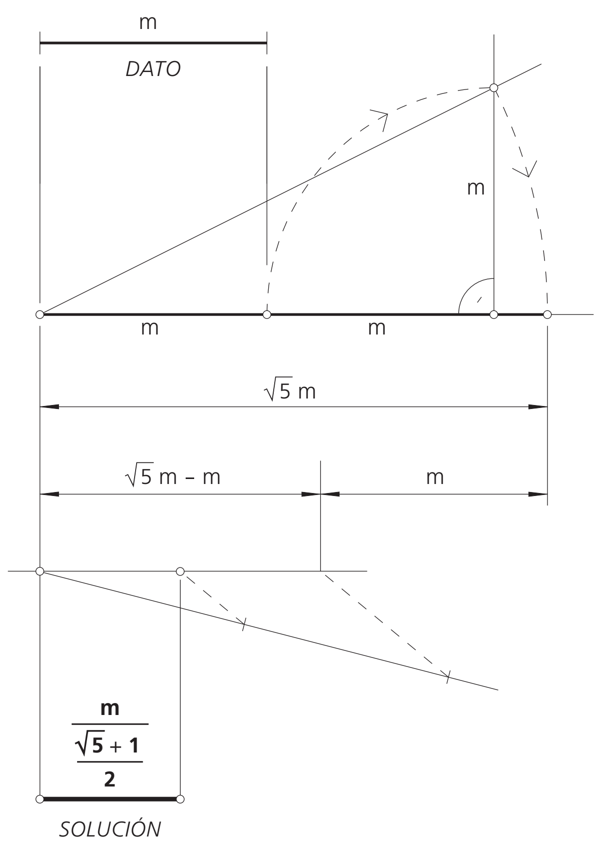
1. **Determinar, gráficamente, el SEGMENTO $s/\sqrt{7}$, siendo $s = 30$ mm.**

2. **Determinar, gráficamente, el SEGMENTO $m/(\sqrt{5}+1)/2$, siendo $m = 30$ mm.**

1 *OPERACIÓN:* $\frac{s}{\sqrt{7}} = \frac{s\sqrt{7}}{7} = \mathbf{\frac{1}{7}\,s\sqrt{7}}$



2 *OPERACIÓN:* $\frac{m}{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} = \frac{2m}{\sqrt{5}+1} = \frac{(\sqrt{5}-1)\,2m}{5-1} = \mathbf{\frac{(\sqrt{5}m - m)}{2}}$



CONSTRUCCIÓN Y OPERACIONES CON ÁNGULOS

nombre y apellidos

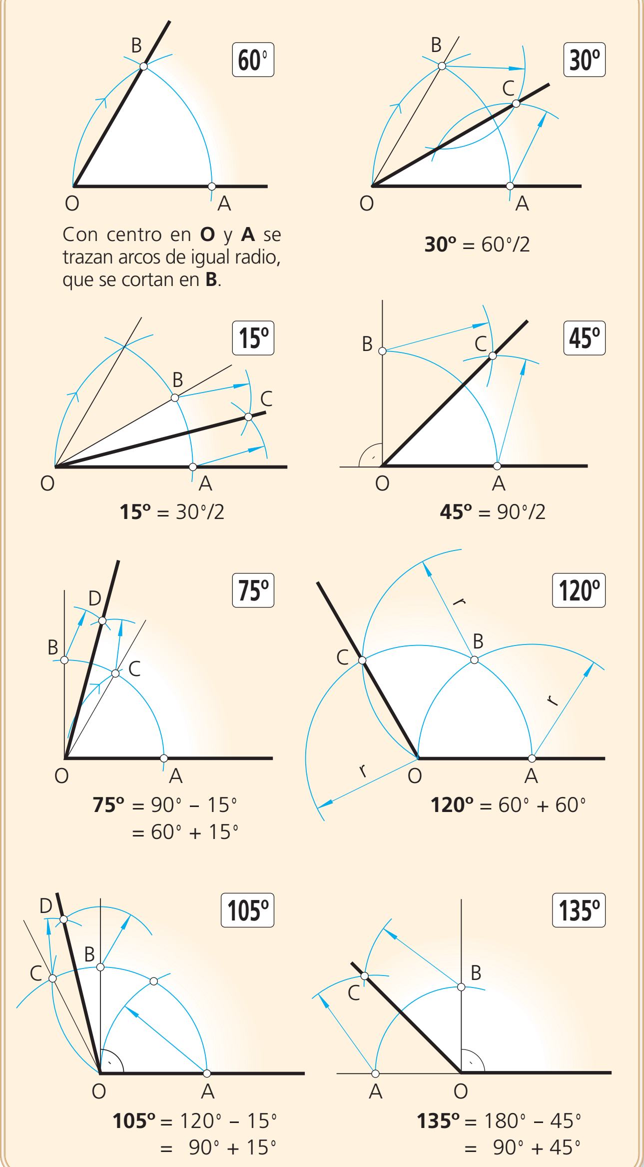
nº | curso/grupo | fecha

1. Traza y trisecciona un **ÁNGULO RECTO** de vértice **V** y lado **a**.
2. El contorno de un **TERRENO** toma la forma **POLIGONAL** que muestra el esquema adjunto, cuyas dimensiones, en metros, son las expresadas en la acotación del mismo.

   Dibuja, a escala **1 / 1.000** (cada metro equivale a un milímetro sobre el papel), el **POLÍGONO IRREGULAR** de **DIEZ LADOS** que conforma el contorno de la superficie de terreno. Comienza por construir el ángulo de **135°** de vértice **B** y lado $\overline{AB}$, para continuar su recorrido en el sentido de las agujas del reloj.

   Asimismo, determina la **MAGNITUD m** del lado $\overline{IJ}$ y el **ÁNGULO α** que forma con el lado $\overline{JA}$.

CONSTRUCCIÓN DE ÁNGULOS CON EL COMPÁS



Con centro en **O** y **A** se trazan arcos de igual radio, que se cortan en **B**.

30° = 60°/2

15° = 30°/2

45° = 90°/2

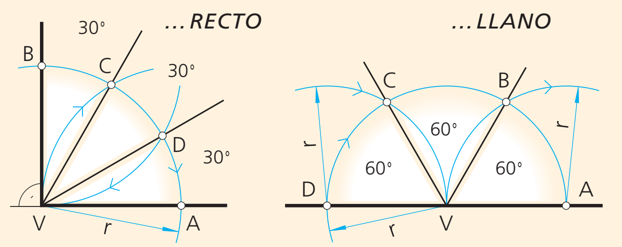
75° = 90° – 15° = 60° + 15°

120° = 60° + 60°

105° = 120° – 15° = 90° + 15°

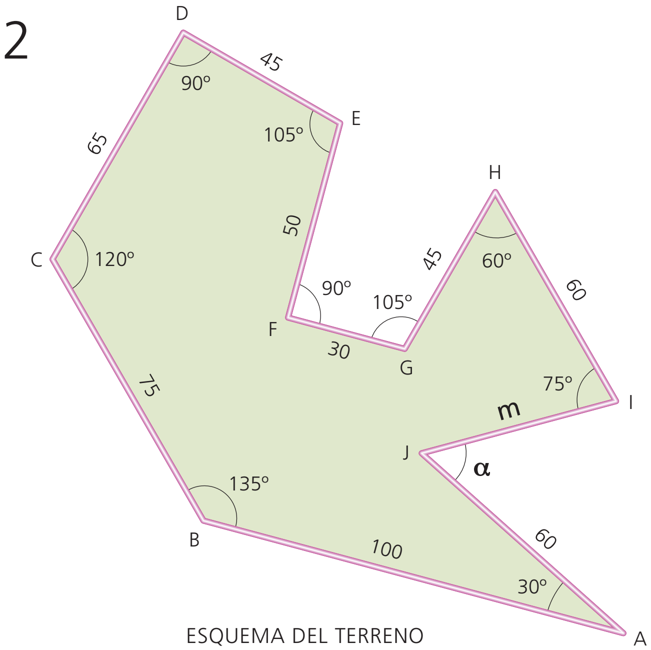
135° = 180° – 45° = 90° + 45°

TRISECCIÓN DE UN ÁNGULO…

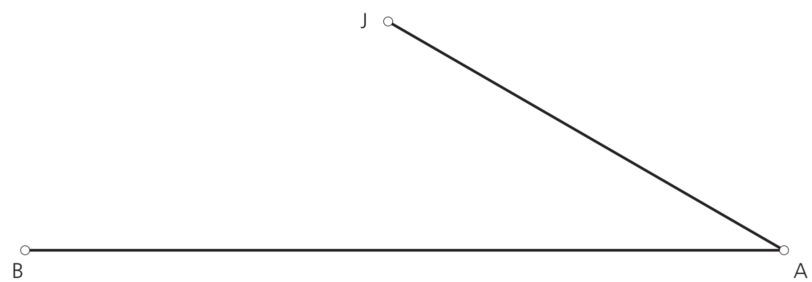


1

2



ESQUEMA DEL TERRENO



e: 1 / 1.000

CONSTRUCCIÓN Y OPERACIONES CON ÁNGULOS

1. Traza y trisecciona un **ÁNGULO RECTO** de vértice **V** y lado **a**.

2. El contorno de un **TERRENO** toma la forma **POLIGONAL** que muestra el esquema adjunto, cuyas dimensiones, en metros, son las expresadas en la acotación del mismo.

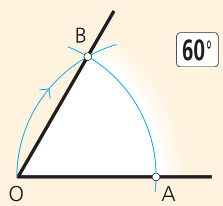
Dibuja, a escala **1 / 1.000** (cada metro equivale a un milímetro sobre el papel), el **POLÍGONO IRREGULAR** de **DIEZ LADOS** que conforma el contorno de la superficie de terreno. Comienza por construir el ángulo de **135°** de vértice **B** y lado **$\overline{AB}$**, para continuar su recorrido en el sentido de las agujas del reloj.

Asimismo, determina la **MAGNITUD m** del lado **$\overline{IJ}$** y el **ÁNGULO α** que forma con el lado **$\overline{JA}$**.

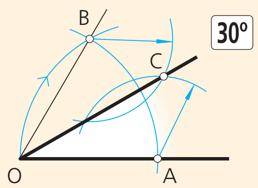
nombre y apellidos

nº	curso/grupo	fecha

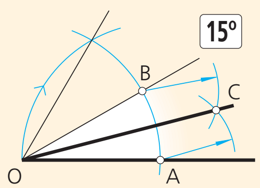
CONSTRUCCIÓN DE ÁNGULOS CON EL COMPÁS



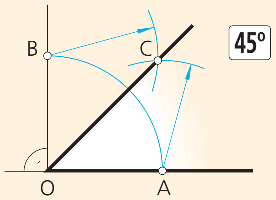
Con centro en **O** y **A** se trazan arcos de igual radio, que se cortan en **B**.



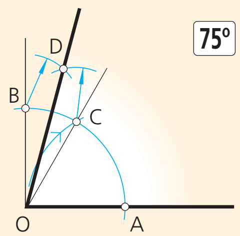
30° = 60°/2



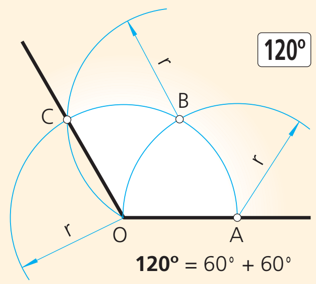
15° = 30°/2



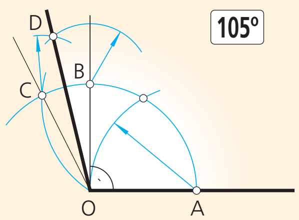
45° = 90°/2



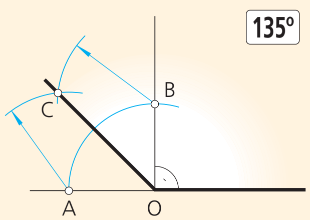
75° = 90° − 15°
= 60° + 15°



120° = 60° + 60°



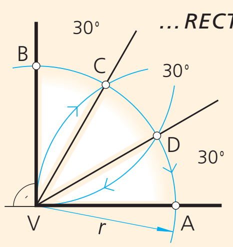
105° = 120° − 15°
= 90° + 15°



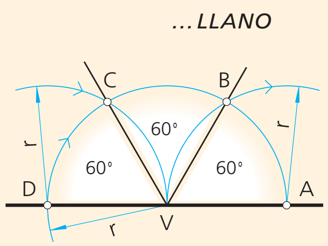
135° = 180° − 45°
= 90° + 45°

TRISECCIÓN DE UN ÁNGULO...

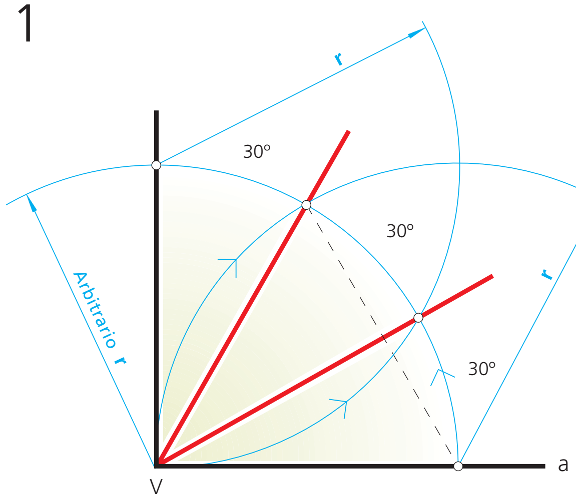
...RECTO



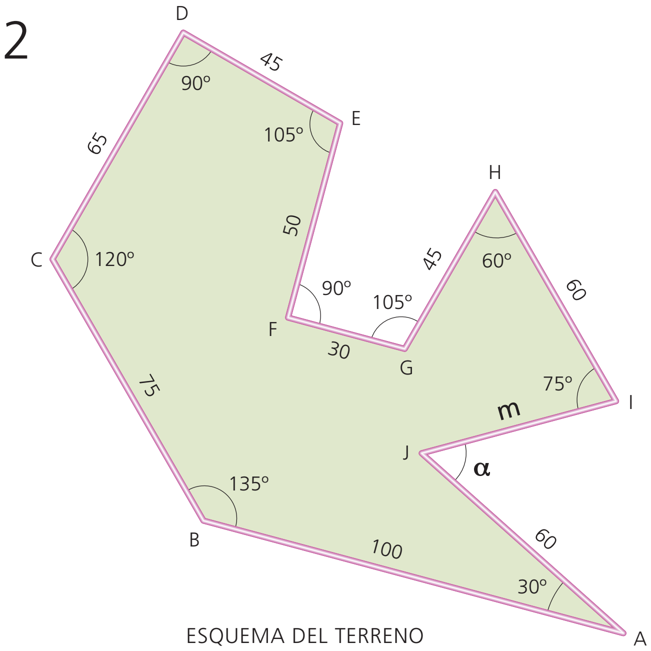
...LLANO



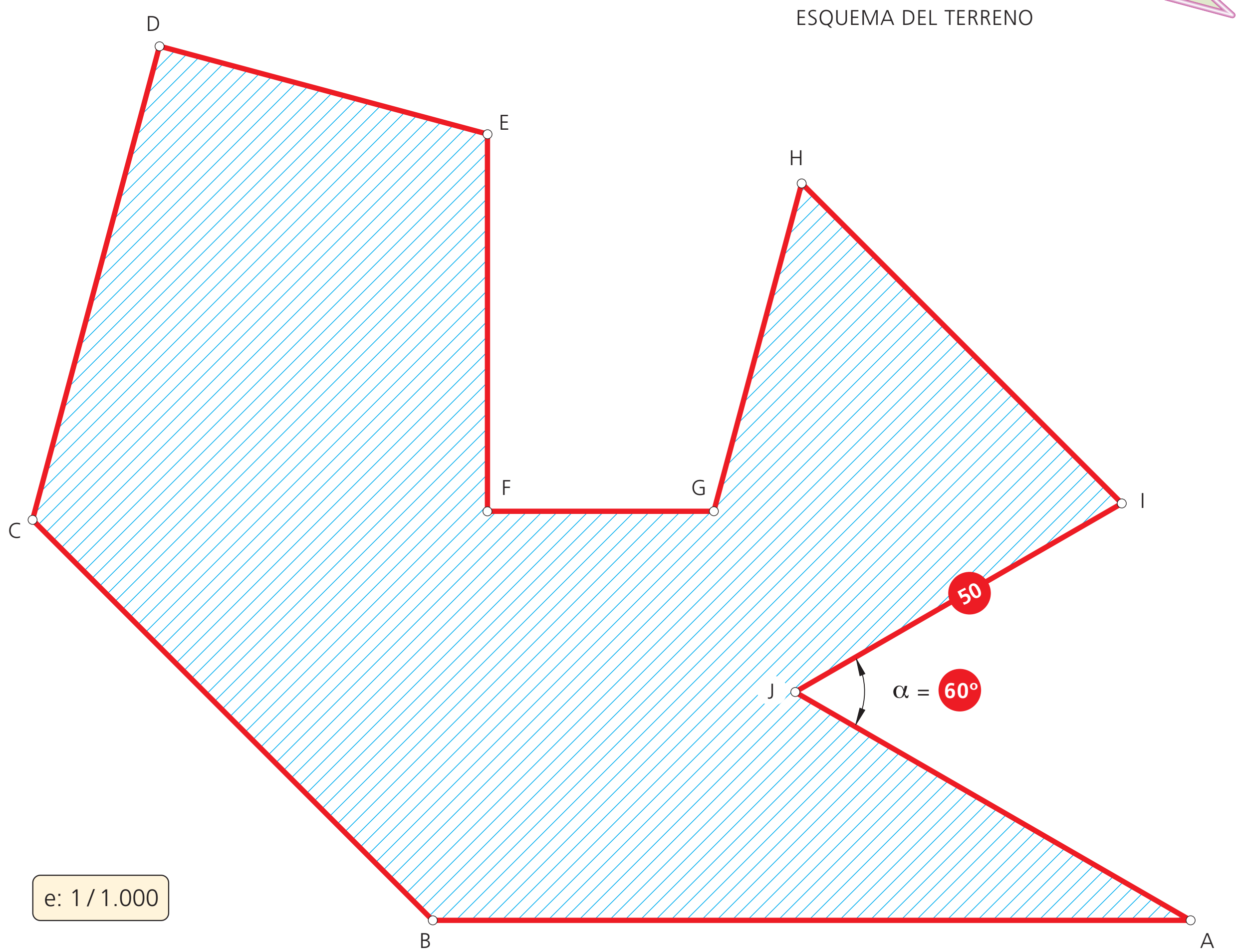
1



2



ESQUEMA DEL TERRENO



VERIFICACIONES

1. Con **VÉRTICE** en **A**, y sobre la misma figura, dibujar los **ÁNGULOS** de **45º** y **22º30'**.

2. 3. y **4.** Trazar los **ÁNGULOS** indicados en la cabecera de cada uno de los **EJERCICIOS PROPUESTOS**. En buena lógica, las construcciones pueden llevarse a cabo siguiendo cualquiera de los desarrollos analíticos indicados, como **SUMA** o **DIFERENCIA** de ángulos básicos.

5. ¿Cuánto vale el **ÁNGULO** que forman las **BISECTRICES** de los **ÁNGULOS ADYACENTES** dados? Expresar la respuesta **GRÁFICAMENTE**.

1

Ángulos: $\boxed{45^\circ} = 90^\circ / 2$

$\boxed{22^\circ\ 30'} = 45^\circ / 2$

2

Ángulo: $\boxed{75^\circ} = 90^\circ - 15^\circ$

$= 60^\circ + 15^\circ$

3

Ángulo: $\boxed{120^\circ} = 60^\circ + 60^\circ$

$= 180^\circ - 60^\circ$

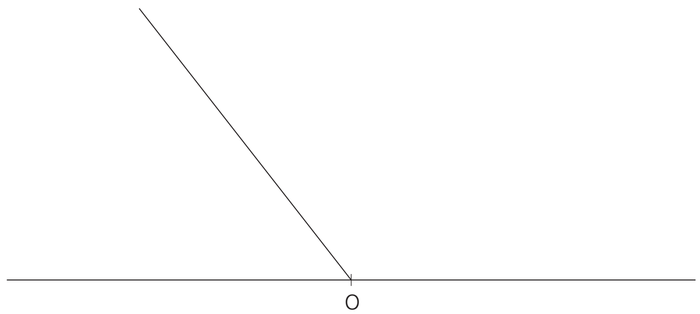
4

Ángulo: $\boxed{135^\circ} = 180^\circ - 45^\circ$

$= 120^\circ + 15^\circ$

$= 90^\circ + 45^\circ$

5



VERIFICACIONES

1. **Con VÉRTICE en A, y sobre la misma figura, dibujar los ÁNGULOS de 45º y 22º30'.**

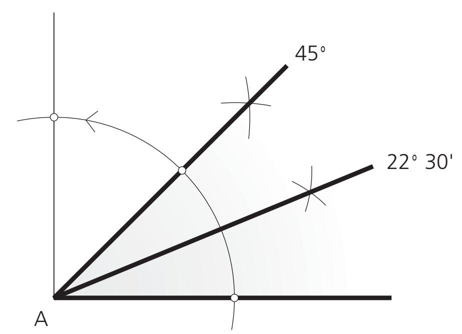
2. 3. y 4. Trazar los ÁNGULOS indicados en la cabecera de cada uno de los EJERCICIOS PROPUESTOS. En buena lógica, las construcciones pueden llevarse a cabo siguiendo cualquiera de los desarrollos analíticos indicados, como SUMA o DIFERENCIA de ángulos básicos.

5. **¿Cuánto vale el ÁNGULO que forman las BISECTRICES de los ÁNGULOS ADYACENTES dados? Expresar la respuesta GRÁFICAMENTE.**

1

Ángulos: $\boxed{45°}$ = 90° / 2

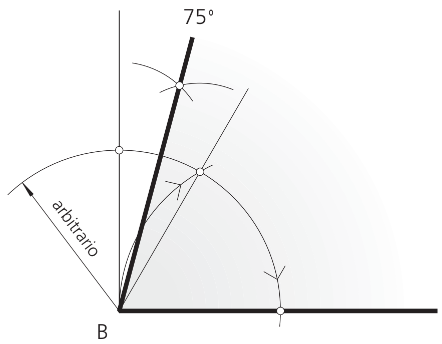
$\boxed{22°\ 30'}$ = 45° / 2



2

Ángulo: $\boxed{75°}$ = 90° – 15°

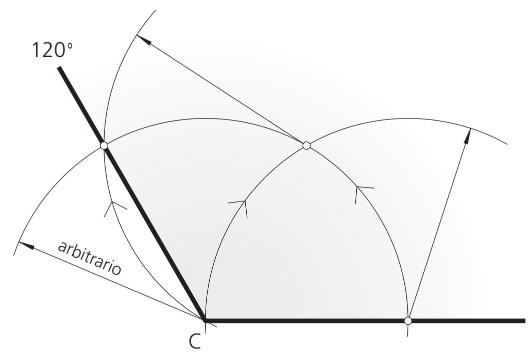
= 60° + 15°



3

Ángulo: $\boxed{120°}$ = 60° + 60°

= 180° – 60°

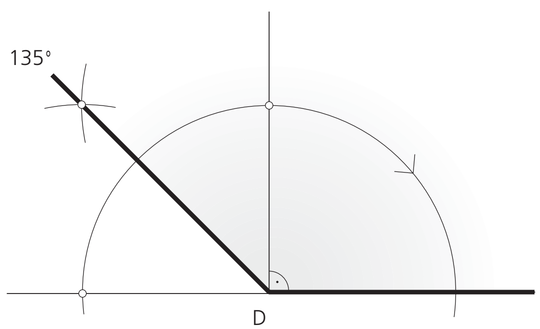


4

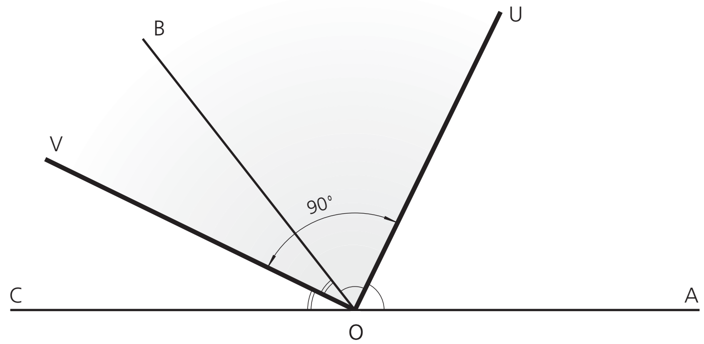
Ángulo: $\boxed{135°}$ = 180° – 45°

= 120° + 15°

= 90° + 45°



5



Sean **OU** y **OV** las bisectrices de los ángulos adyacentes $\widehat{\mathbf{AOB}}$ y $\widehat{\mathbf{BOC}}$ respectivamente.

Se verificará por hipótesis que:

$\widehat{\mathbf{AOU}} = \widehat{\mathbf{UOB}}$ y que: $\widehat{\mathbf{BOV}} = \widehat{\mathbf{VOC}}$.

Por tanto: $\widehat{\mathbf{AOU}} + \widehat{\mathbf{VOC}} = \widehat{\mathbf{UOB}} + \widehat{\mathbf{BOV}}$.

luego: $\widehat{\mathbf{UOV}} = \widehat{\mathbf{UOB}} + \widehat{\mathbf{BOV}}$.

(lo que significa la mitad de un ángulo llano: **un recto**).

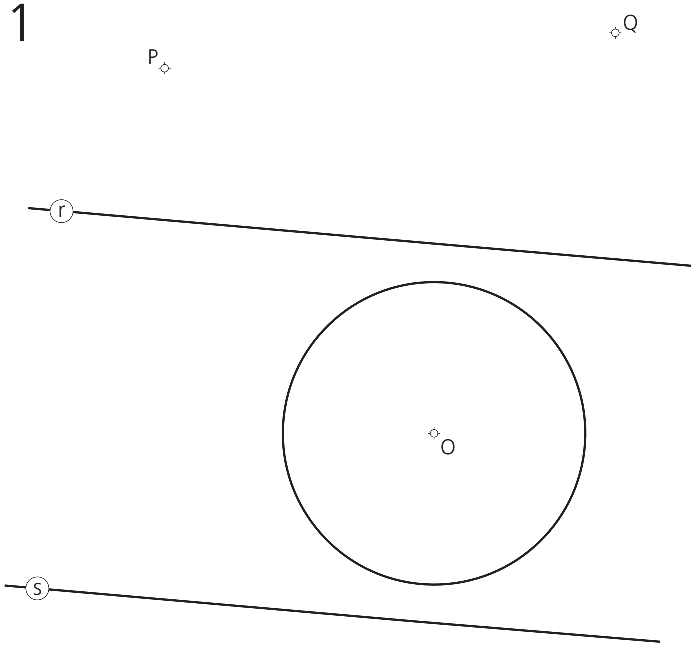
nombre y apellidos

nº | curso/grupo | fecha

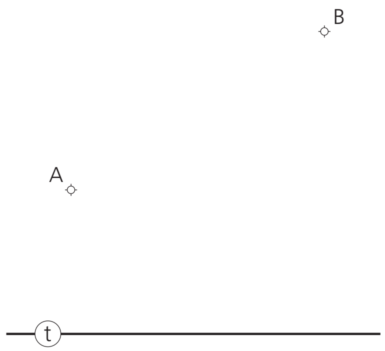
DISTANCIAS Y LUGARES GEOMÉTRICOS

1. Traza y acota, en milímetros, sobre cada uno de los segmentos correspondientes, la **DISTANCIA** entre cada par de elementos dados: puntos **P** y **Q**, rectas **r** y **s** y circunferencia de centro **O**.
2. Dados los puntos **A** y **B** y la recta **t**, halla en ésta un punto **P** tal que la distancia $\overline{PA} + \overline{PB}$ tenga un **VALOR MÍNIMO**. Calcula la **DISTANCIA**.
3. Localiza, gráficamente, todos los **PUNTOS** que se encuentren a la vez a **10** mm. de la circunferencia de centro **O** y de la recta **m**.
4. Localiza en el dibujo (**e: 1 / 10.000**) un **TESORO** que está enterrado a **300** m. de un árbol (**A**) y equidistante de las cabañas **P** y **Q**.
5. Dos **PUEBLOS A** y **B** están uno a cada lado del **RÍO** que los separa. Se trata de obtener la **POSICIÓN** del **PUENTE** (perpendicular al cauce) para que el camino que va de un pueblo a otro (pasando por el puente) sea lo más corto posible. Asimismo, conociendo que el dibujo se ha planteado a escala **1 / 1.000**, calcula la **DISTANCIA** entre **A** y **B** pasando por el puente.

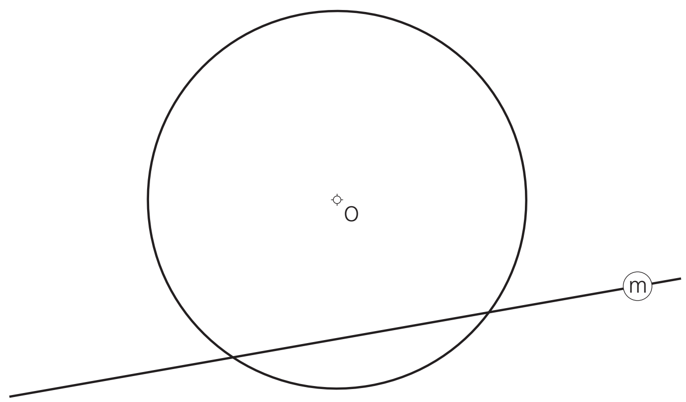
1



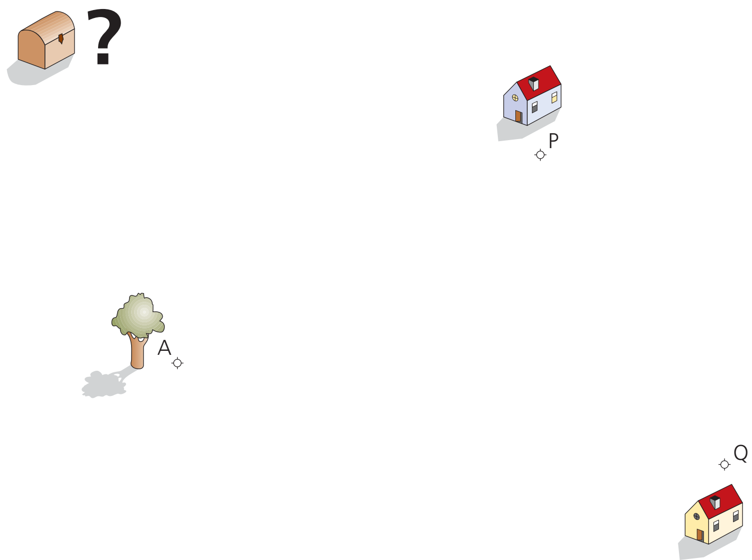
2



3

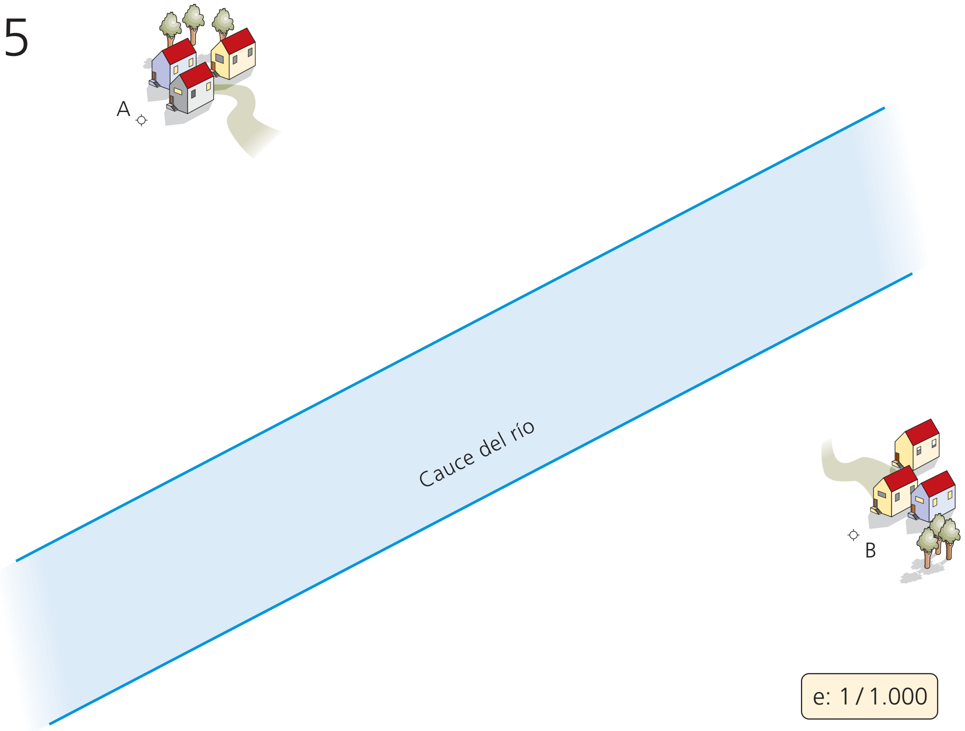


4



e: 1 / 10.000

5



e: 1 / 1.000

nombre y apellidos

nº | curso/grupo | fecha

DISTANCIAS Y LUGARES GEOMÉTRICOS

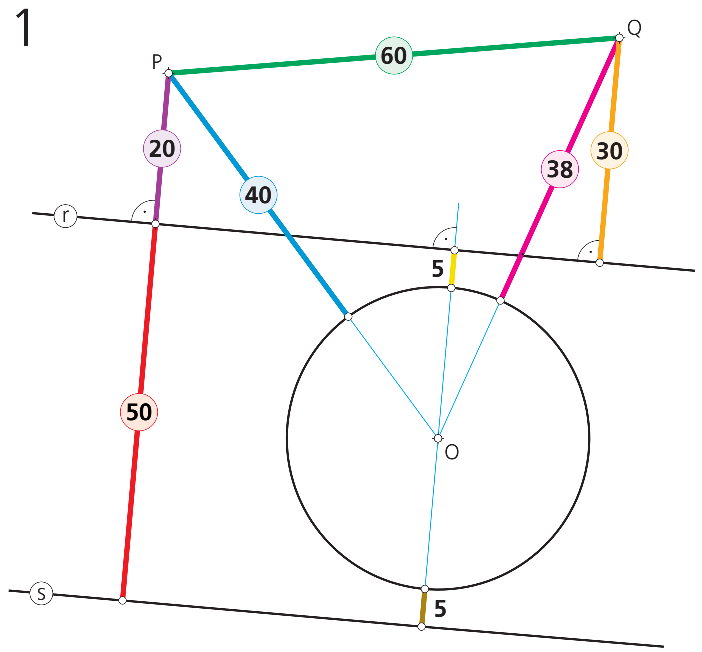
1. Traza y acota, en milímetros, sobre cada uno de los segmentos correspondientes, la **DISTANCIA** entre cada par de elementos dados: puntos **P** y **Q**, rectas **r** y **s** y circunferencia de centro **O**.

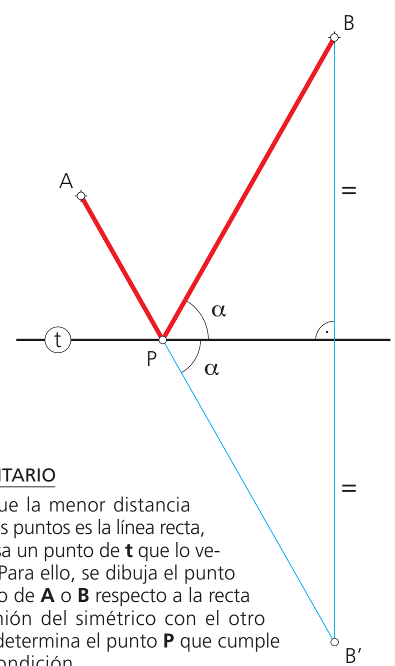
2. Dados los puntos **A** y **B** y la recta **t**, halla en ésta un punto **P** tal que la distancia $\overline{PA} + \overline{PB}$ tenga un **VALOR MÍNIMO**. Calcula la **DISTANCIA**.

3. Localiza, gráficamente, todos los **PUNTOS** que se encuentren a la vez a **10** mm. de la circunferencia de centro **O** y de la recta **m**.

4. Localiza en el dibujo (**e: 1 / 10.000**) un **TESORO** que está enterrado a **300** m. de un árbol (**A**) y equidistante de las cabañas **P** y **Q**.

5. Dos **PUEBLOS A** y **B** están uno a cada lado del **RÍO** que los separa. Se trata de obtener la **POSICIÓN** del **PUENTE** (perpendicular al cauce) para que el camino que va de un pueblo a otro (pasando por el puente) sea lo más corto posible. Asimismo, conociendo que el dibujo se ha planteado a escala **1 / 1.000**, calcula la **DISTANCIA** entre **A** y **B** pasando por el puente.

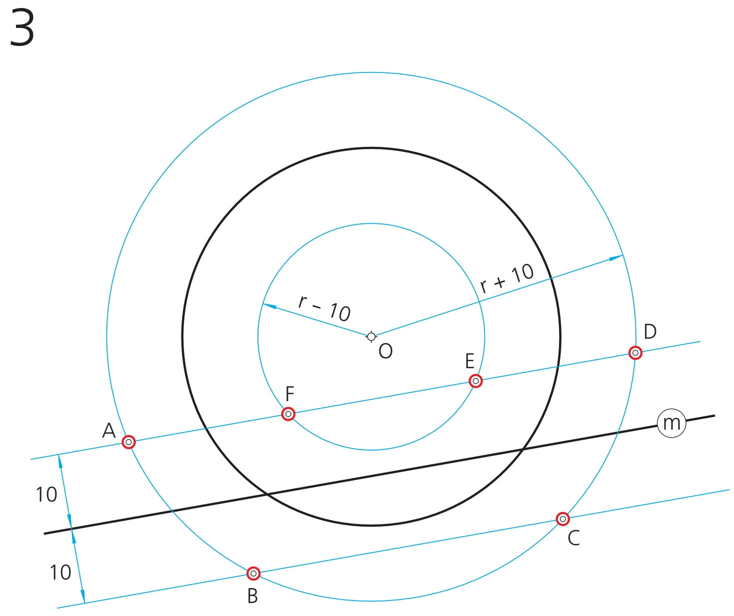




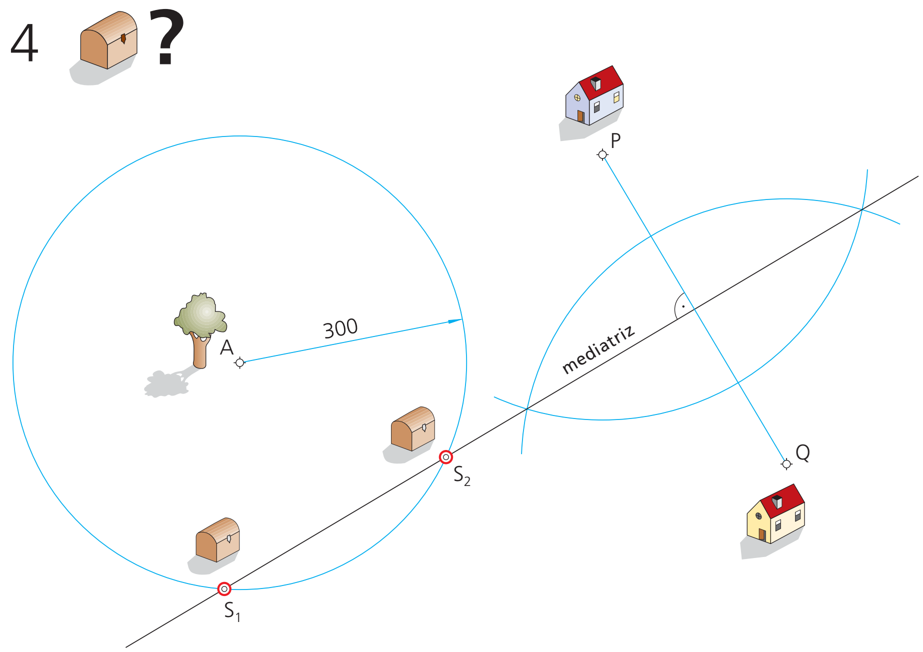
COMENTARIO

Dado que la menor distancia entre dos puntos es la línea recta, se precisa un punto de **t** que lo verifique. Para ello, se dibuja el punto simétrico de **A** o **B** respecto a la recta **t**. La unión del simétrico con el otro punto, determina el punto **P** que cumple dicha condición.

Distancia: $\overline{AP} + \overline{PB} = \overline{AB'} =$ **68 mm.**

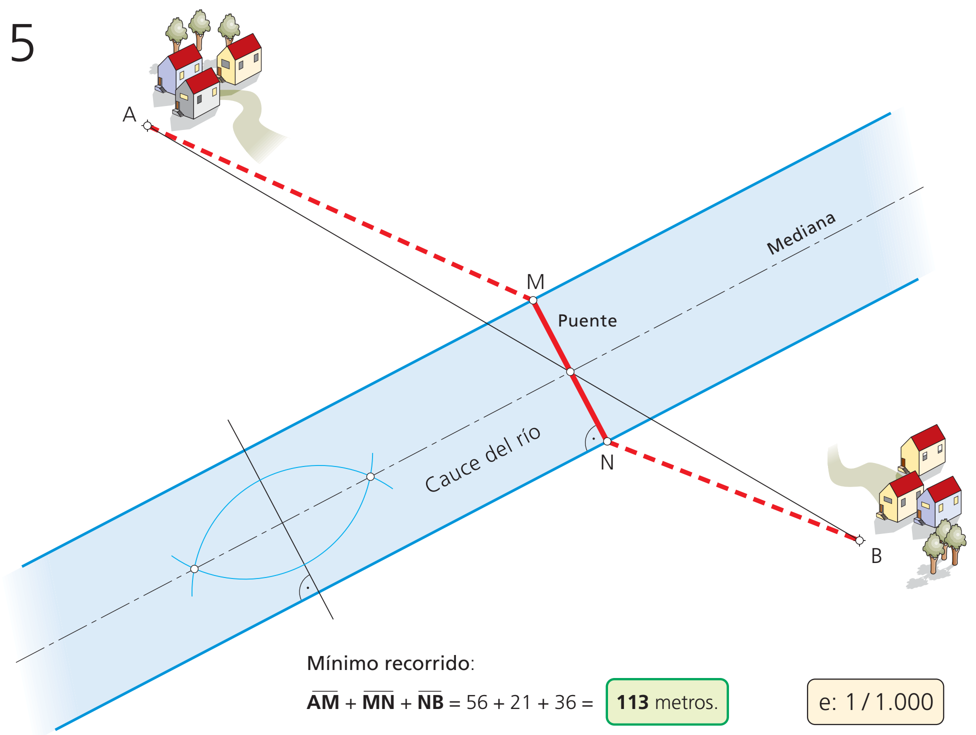


SOLUCIÓN: puntos **A**, **B**, **C**, **D**, **E** y **F**.



e: 1 / 10.000

SOLUCIÓN: El tesoro puede encontrarse en $\mathbf{S_1}$ o en $\mathbf{S_2}$.



Mínimo recorrido:

$\overline{AM} + \overline{MN} + \overline{NB} = 56 + 21 + 36 =$ **113** metros.

e: 1 / 1.000

VERIFICACIONES

1. Señalar, con toda precisión, todos los **PUNTOS** que se **ENCUENTRAN** a la vez a **28** mm. del punto **P** y a **35** mm. del punto **Q**, siendo la **DISTANCIA** entre ellos de **50** mm.
2. Con **VÉRTICE** en **V** trazar un **ÁNGULO** de **37°30'**.
3. Con **VÉRTICE** en **O** trazar un **ÁNGULO** de **82°30'**.
4. Con **VÉRTICE** en **O** trazar un **ÁNGULO** de **165**°.

1

Q

P

2

Ángulo: $\boxed{37°\ 30'} = 75°/2$

V

3

Ángulo: $\boxed{82°\ 30'} = 60° + 15° + 7°\ 30'$

$= 90° - 7°\ 30'$

$= 45° + 37°\ 30'$

O

4

Ángulo: $\boxed{165°} = 90° + 60° + 15°$

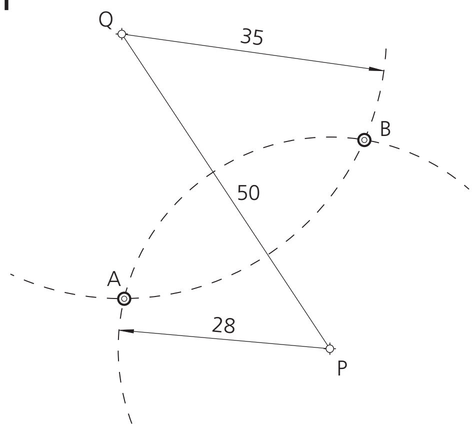
$= 180° - 15°$

O

VERIFICACIONES

1. **Señalar, con toda precisión, todos los PUNTOS que se ENCUENTRAN a la vez a 28 mm. del punto P y a 35 mm. del punto Q, siendo la DISTANCIA entre ellos de 50 mm.**
2. **Con VÉRTICE en V trazar un ÁNGULO de 37° 30'.**
3. **Con VÉRTICE en O trazar un ÁNGULO de 82° 30'.**
4. **Con VÉRTICE en O trazar un ÁNGULO de 165°.**

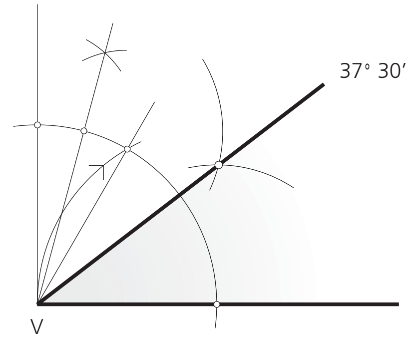
1



Los puntos **A** y **B** como intersección de dos lugares geométricos.

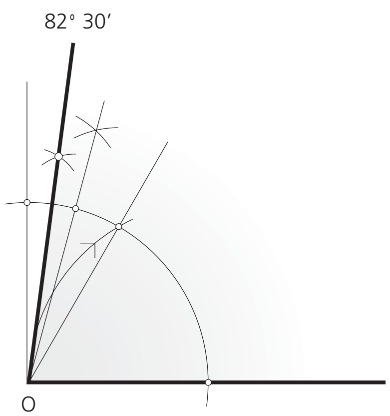
2

Ángulo: $\boxed{37^\circ\ 30'}$ = 75°/2



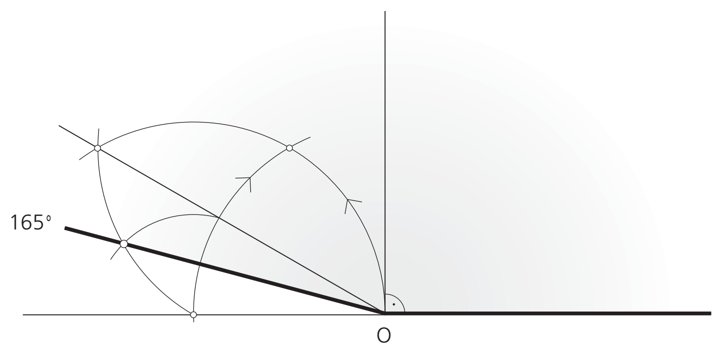
3

Ángulo: $\boxed{82^\circ\ 30'}$ = 60° + 15° + 7° 30'
= 90° − 7° 30'
= 45° + 37° 30'



4

Ángulo: $\boxed{165^\circ}$ = 90° + 60° + 15°
= 180° − 15°



LUGARES GEOMÉTRICOS FORMADOS POR PUNTOS

1. Traza el LUGAR GEOMÉTRICO de los CENTROS de las CIRCUNFERENCIAS que pasan por dos puntos **A** y **B** distantes **30** mm.

2. Traza la CIRCUNFERENCIA que pasa por el punto **P** y resulta ser EQUIDISTANTE de la que contiene o pasa por los puntos **A**, **B** y **C** no alineados.

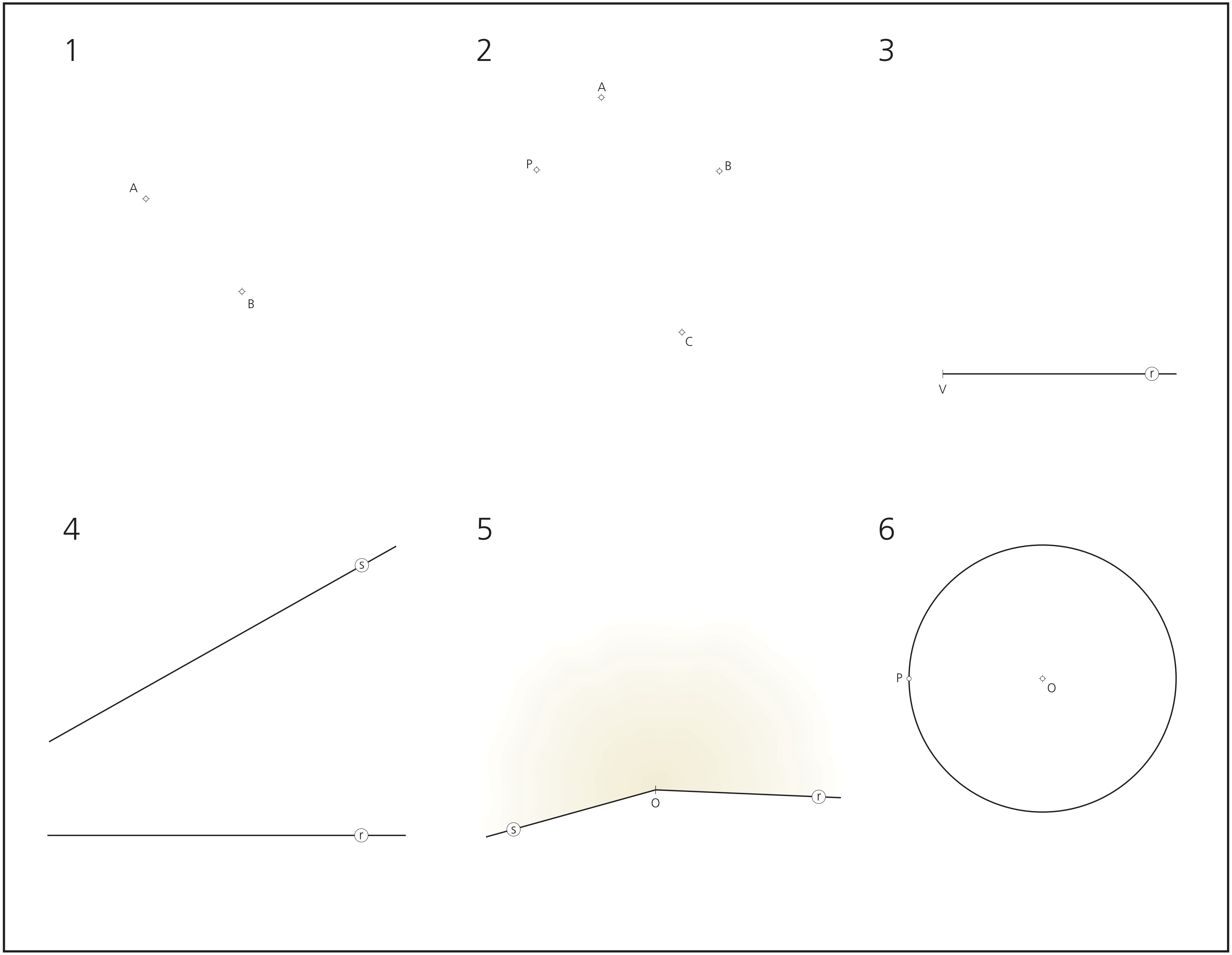
3. Halla el LUGAR GEOMÉTRICO de los puntos del plano que EQUIDISTAN de dos rectas **r** y **s**, que se CORTAN, en el punto **V**, bajo un ángulo de **105º**.

4. Traza la BISECTRIZ del ÁNGULO formado por dos rectas **r** y **s**, de VÉRTICE INACCESIBLE (fuera de los límites del papel).

5. Divide –a criterio del profesor– en 2^n partes IGUALES (siendo **n** = 1, 2, 3...) el ÁNGULO REFLEJO que muestra la figura.

6. Halla el LUGAR GEOMÉTRICO de los PUNTOS MEDIOS de las infinitas CUERDAS que pasan por un punto **P** perteneciente a la CIRCUNFERENCIA de centro **O** dada.

nombre y apellidos		
nº	curso/grupo	fecha



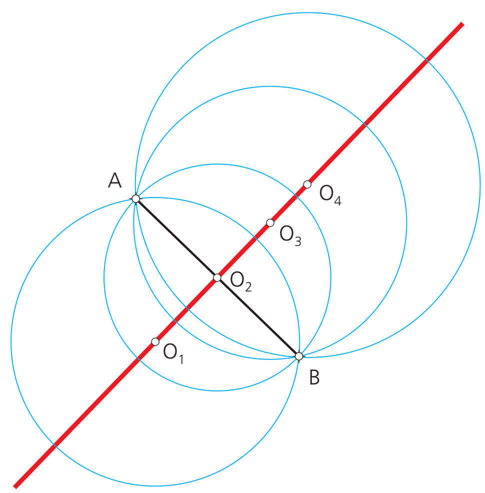
nombre y apellidos

nº | curso/grupo | fecha

LUGARES GEOMÉTRICOS FORMADOS POR PUNTOS

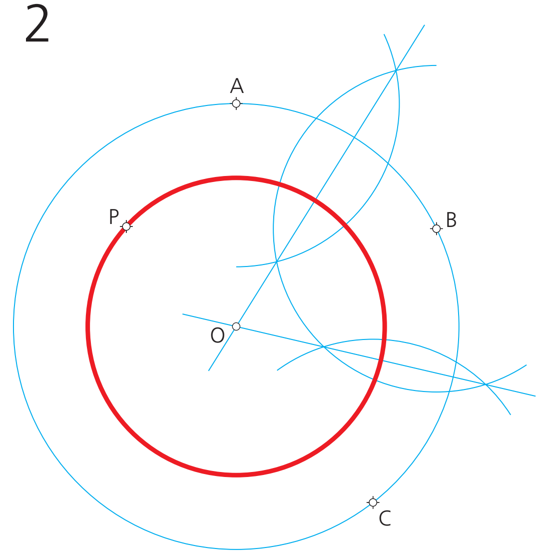
1. Traza el LUGAR GEOMÉTRICO de los CENTROS de las CIRCUNFERENCIAS que pasan por dos puntos **A** y **B** distantes **30** mm.
2. Traza la CIRCUNFERENCIA que pasa por el punto **P** y resulta ser EQUIDISTANTE de la que contiene o pasa por los puntos **A**, **B** y **C** no alineados.
3. Halla el LUGAR GEOMÉTRICO de los puntos del plano que EQUIDISTAN de dos rectas **r** y **s**, que se CORTAN, en el punto **V**, bajo un ángulo de **105º**.
4. Traza la BISECTRIZ del ÁNGULO formado por dos rectas **r** y **s**, de VÉRTICE INACCESIBLE (fuera de los límites del papel).
5. Divide –a criterio del profesor– en 2^n partes IGUALES (siendo **n** = 1, 2, 3...) el ÁNGULO REFLEJO que muestra la figura.
6. Halla el LUGAR GEOMÉTRICO de los PUNTOS MEDIOS de las infinitas CUERDAS que pasan por un punto **P** perteneciente a la CIRCUNFERENCIA de centro **O** dada.

1



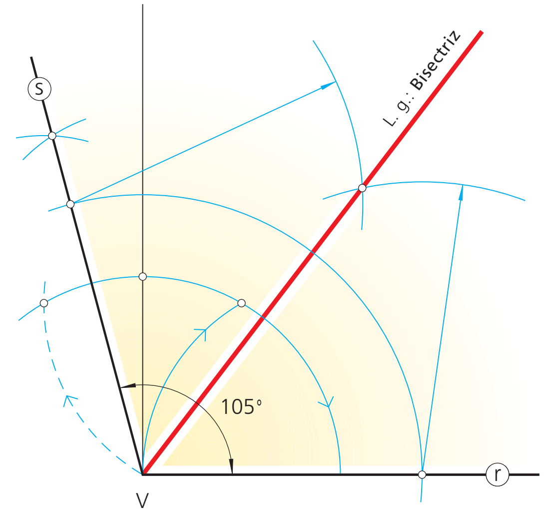
L. g.: la **mediatriz** del segmento $\overline{AB}$.

2



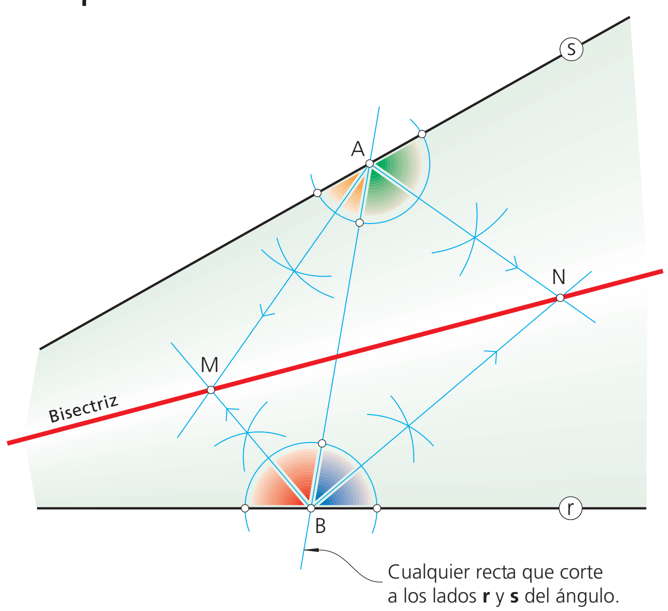
L. g.: **circunferencia** de centro **O**, concéntrica con la que pasa por los puntos **A**, **B** y **C**, y de radio $\overline{OP}$.

3

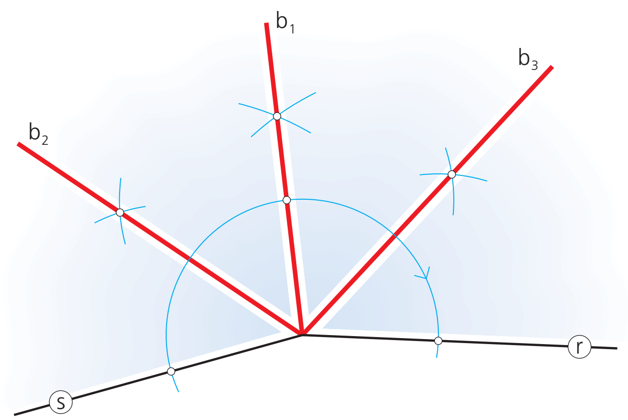


L. g.: la **bisectriz** del ángulo de **105°** que forman las rectas **r** y **s**.

4

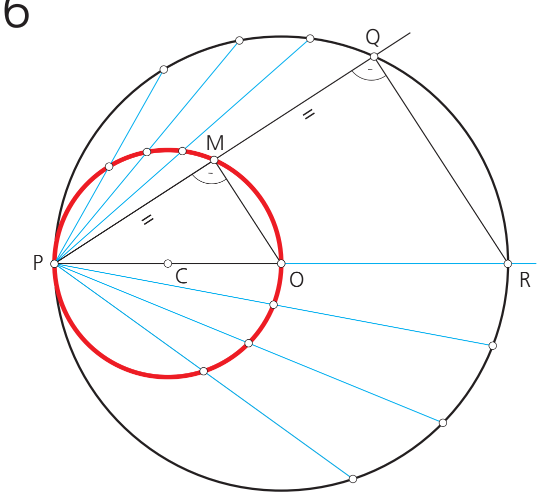


5



SOLUCIÓN: para **n = 2**; esto es, en $2^2 = 4$ partes iguales.

6



COMENTARIO A SU TRAZADO

Todos los puntos medios (tal como el **M**), de las infinitas cuerdas que pueden pasar por el extremo **P** determinan ángulos rectos (arcos capaces de 90°) con que se visualiza el radio $\overline{OP}$.
Por ello, el lugar geométrico buscado será la circunferencia de centro **C** y radio $\overline{OP}/2$.