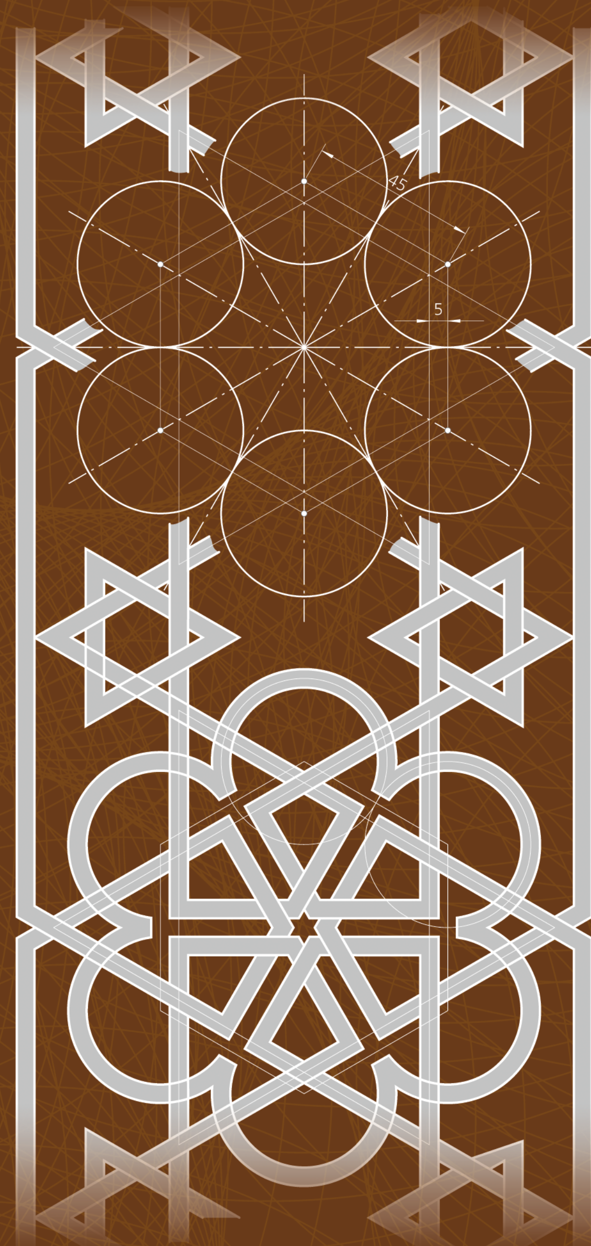
geometría métrica aplicada

II

10 CURVAS CÓNICAS



10 CURVAS CÓNICAS

OBJETIVOS

1 *Analizar el tratamiento de las cónicas como curvas fundamentales en el dibujo técnico por su constante presencia.*

2 *Razonar que el fundamento de cada trazado se basa en la aplicación de las propiedades de cada curva cónica.*

3 *Descubrir la presencia de estos lugares geométricos en la vida cotidiana, en la ciencia, en la técnica y en el arte.*

1 DEFINICIÓN Y CLASIFICACIÓN

Se denominan curvas cónicas a las diversas secciones producidas en una superficie cónica, de revolución, por un plano que no pasa por el vértice.

Según sea la posición del plano secante ***(π)*** respecto del eje del cono, en relación con el ángulo del vértice, pueden establecerse tres tipos de secciones:

Elipse. Cuando el plano secante corta a todas las generatrices de la superficie, en cuyo caso el plano forma con el eje de la superficie cónica un ángulo mayor que el semiángulo cónico: $\alpha < \beta$.

La ***circunferencia*** resulta ser un caso particular de esta sección. Se contempla cuando el plano secante es perpendicular al eje de la superficie cónica y no pasa por el vértice *(*$\beta = 90°$*)*.

Parábola. Cuando el plano secante es paralelo a una sola generatriz, en cuyo caso el plano forma con el eje de la superficie cónica el mismo ángulo que el semiángulo cónico: $\alpha = \beta$.

La curva resulta ser abierta y con un punto impropio (en el infinito).

Hipérbola. Cuando el plano secante es paralelo a dos generatrices, en cuyo caso el plano forma con el eje de la superficie cónica un ángulo menor que el semiángulo cónico: $\alpha > \beta$.

La curva resulta ser abierta con dos ramas y, por ende, con dos puntos impropios.

2 ELEMENTOS DE UNA CÓNICA

- ***Eje o ejes de simetría.*** Recta o rectas imaginarias en relación a las cuales una figura es simétrica.
- ***Centro.*** Punto de corte de los ejes de simetría y, por tanto, punto del que equidistan los elementos de la curva.
- ***Focos.*** Son los puntos notables de la cónica. Resultan ser los puntos de tangencia de las esferas, inscritas al cono de revolución, con el plano secante que origina la sección cónica *(**Teorema de Dandelin**)*.
- ***Directrices.*** Son las rectas de intersección del plano secante con el plano que contiene a la circunferencia de contacto entre el cono y la esfera que, siendo tangente al plano de intersección ***(π)***, se encuentra inscrita en la superficie cónica.

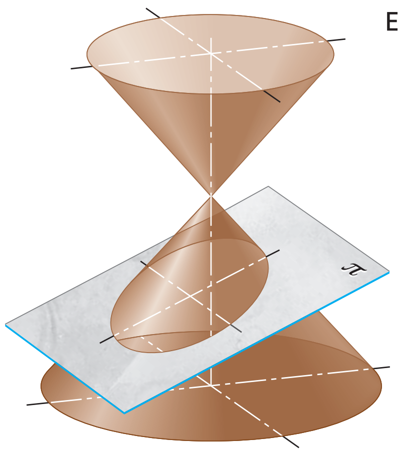
  Tanto la elipse como la hipérbola poseen dos ejes de simetría, dos focos y dos directrices; la parábola sólo un eje, un foco y una directriz.
- ***Excentricidad.*** Es la razón constante de distancias desde un punto *P* cualquiera de la curva al foco y a la directriz correspondiente.

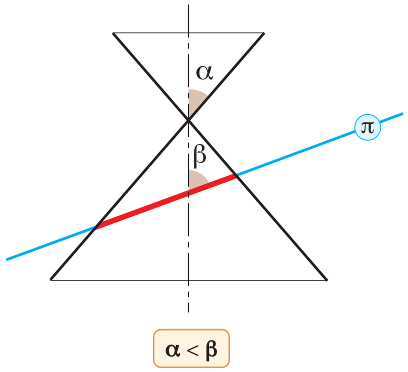
En la *elipse*: $e = \overline{PF}_2 / \overline{PD}_2 < 1 \ ; \ (0 < e < 1)$

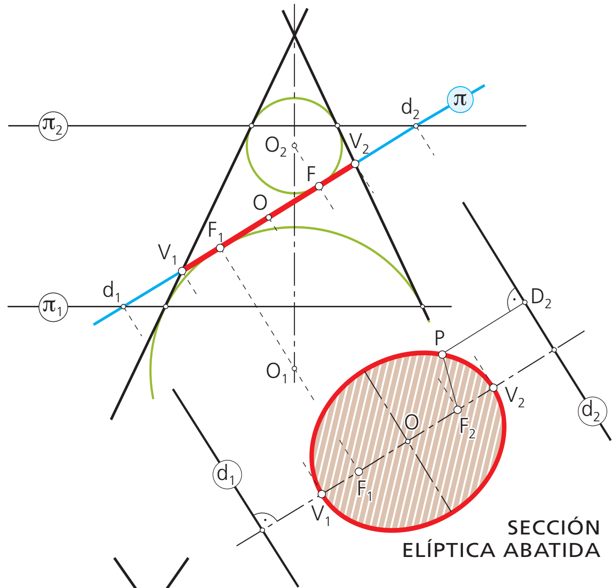
En la *hipérbola*: $e = \overline{PF}_1 / \overline{PD}_1 > 1 \ ; \ (1 < e < \infty)$

En la *parábola*: $e = \overline{PF} / \overline{PD} = 1$

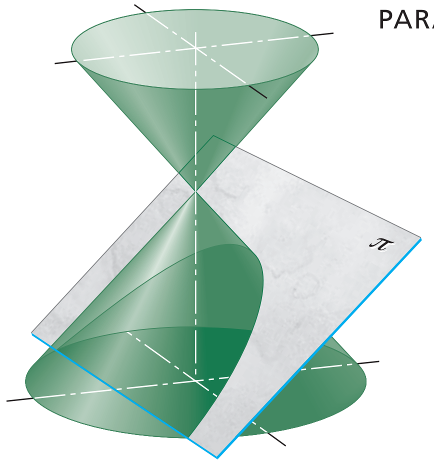
ELIPSE

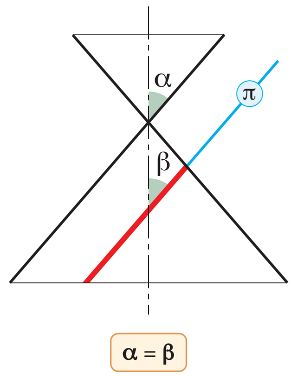


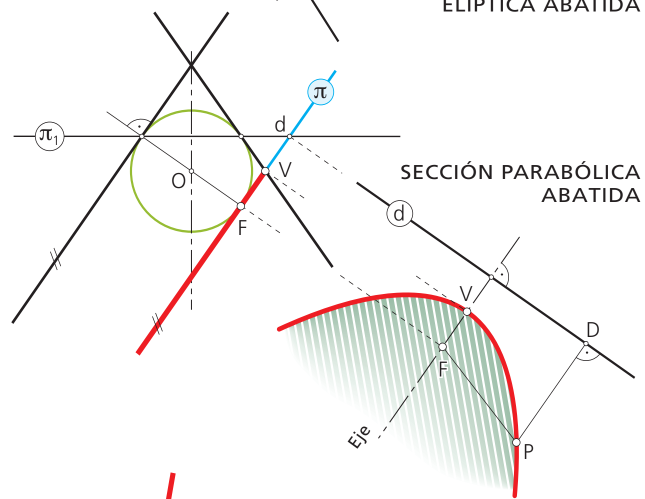




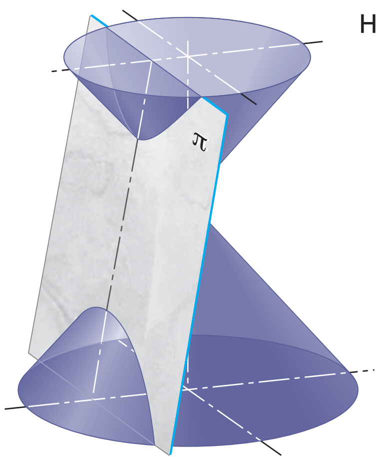
PARÁBOLA

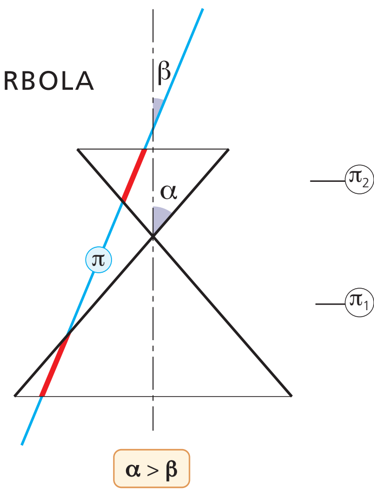


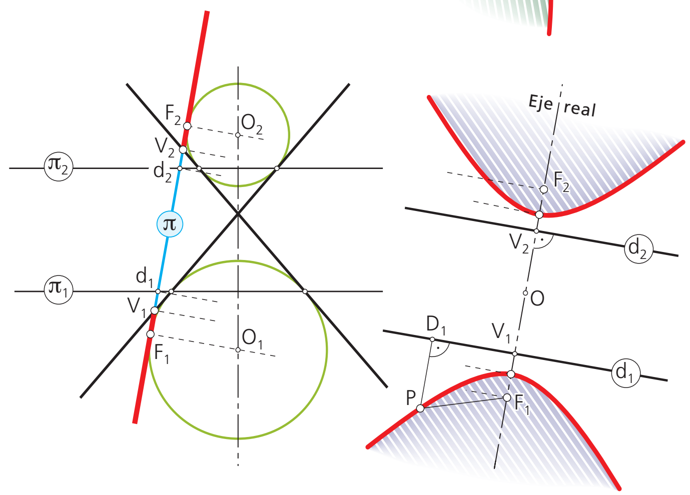




HIPÉRBOLA







SECCIÓN HIPERBÓLICA ABATIDA

3 ELIPSE

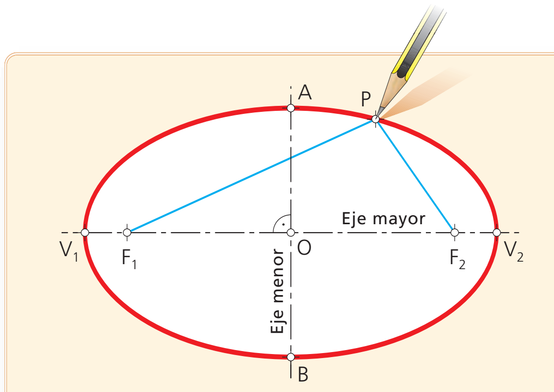
3.1 Definición y parámetros.

«La elipse es una curva cerrada y plana, que se define como el lugar geométrico de los puntos del plano cuya suma de distancias a otros dos fijos F_1 y F_2, llamados focos, es constante e igual a la magnitud del eje mayor ($\overline{V_1V_2}$)».

Esto es, para cualquier punto P de la curva, la suma de sus radios vectores es constante:

$$\boxed{\overline{PF_1}+\overline{PF_2}=\overline{V_1V_2}=2a}$$

- ***Parámetros:***
  - **2a**: longitud del eje mayor ($\overline{V_1V_2}$).
  - **2b**: longitud del eje menor ($\overline{AB}$).
  - **2c**: distancia focal ($\overline{F_1F_2}$).



DEFINICIÓN: $\boxed{\overline{PF_1}+\overline{PF_2}=\overline{V_1V_2}}$

PARÁMETROS:

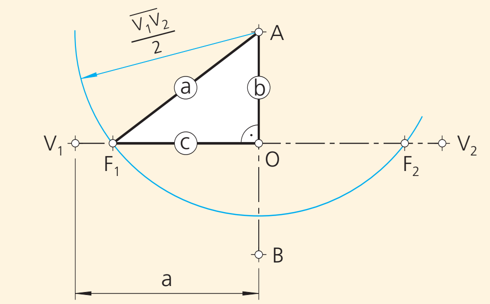
2a = $\overline{V_1V_2}$ (eje mayor).
2b = $\overline{AB}$ (eje menor).
2c = $\overline{F_1F_2}$ (distancia focal).

EXCENTRICIDAD:

$\boxed{e=\frac{c}{a}}$ $(0<e<1)$.

- Para **e = 0**, la curva es una circunferencia.
- Para **e = 1**, se transforma en un segmento ($\overline{V_1V_2}$).

3.1 Características de la elipse.



3.1 Determinación de los focos dados los ejes.

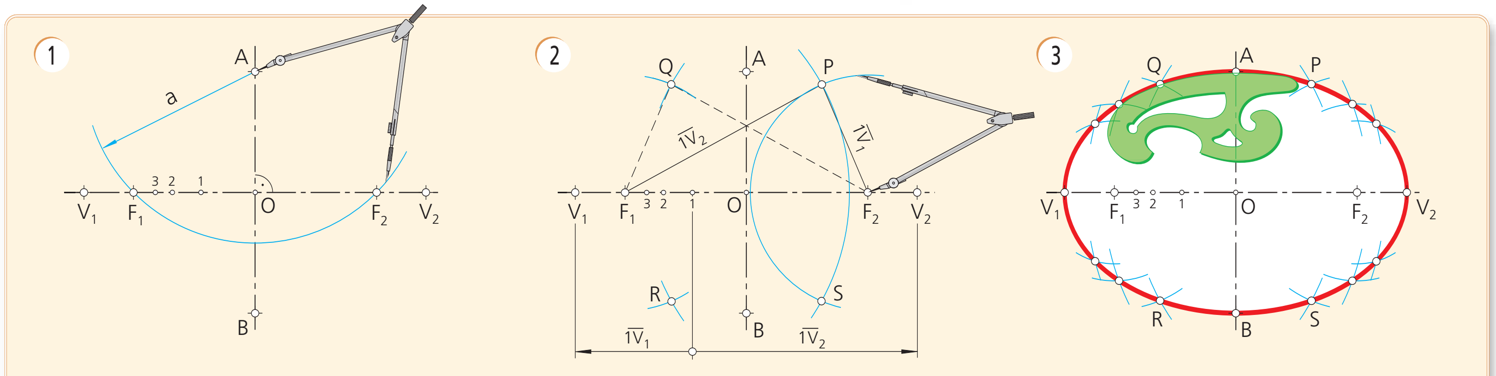
3.2 Propiedades fundamentales.

- ***Simetría:*** la elipse tiene dos ejes de simetría perpendiculares entre sí que se cortan en el centro de la curva *(O)*.
- ***Ejes:*** el eje mayor $\overline{V_1V_2}$ es igual a $2a$ y el eje menor $\overline{AB}$ a $2b$. Por tanto, según la definición de elipse, desde un extremo A del eje menor se verifica que: $\overline{AF_1}+\overline{AF_2}=\overline{V_1V_2}=2a$; por lo que al ser $\overline{AF_1}=\overline{AF_2}$ se deduce que:

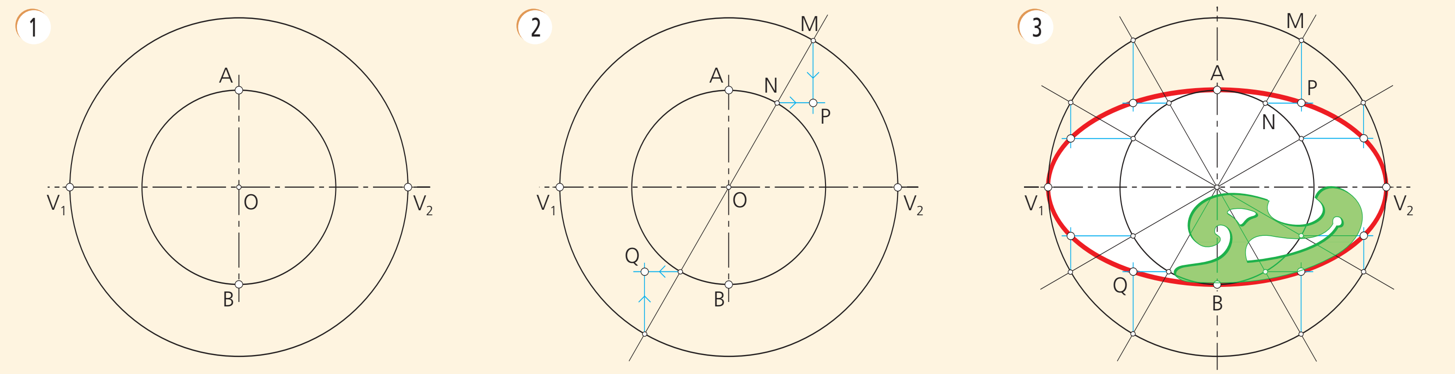
  $$\overline{AF_1}=\overline{AF_2}=\overline{V_1V_2}/2=a$$

  lo que permite situar la posición de los focos cuando se conocen los ejes de la cónica. Para ello, se hace centro en el extremo A o en B del eje menor y se determinan sobre el eje mayor los puntos de corte con un arco de radio igual al semieje mayor.
- ***Radios vectores:*** son las rectas que unen cada punto P de la elipse con los focos F_1 y F_2; verificándose que: $\overline{PF_1}+\overline{PF_2}=2a$.
- ***Parámetros:*** son las tres magnitudes que caracterizan la curva elíptica. Los tres están ligados entre sí, al formar parte de los lados de un triángulo rectángulo de vértices: el centro O de la curva, el foco (F_1 o F_2) y un extremo del eje menor (A o B), verificándose que: $a^2=b^2+c^2$.
- ***Excentricidad:*** es la razón o cociente c/a. En la elipse sus valores están comprendidos entre *cero* y la *unidad*.

3.3 Trazado de la elipse conocidos los ejes.



3.3.1 Construcción de la elipse por puntos, de acuerdo a su definición como lugar geométrico.



3.3.2 Construcción de la elipse mediante dos circunferencias concéntricas (método de afinidad).

3.3.1 Construcción por puntos.

- *DATOS:* $2a=\overline{V_1V_2}$ y $2b=\overline{AB}$.
- *Paso 1.-* Se determinan los focos F_1 y F_2. A continuación se toman puntos auxiliares, tales como *1, 2, 3*... sobre el eje mayor, situados entre uno de los focos y el centro O.
- *Paso 2.-* Se trazan arcos de radio $\overline{1V_1}$ y $\overline{1V_2}$ con centro en F_1 y F_2 respectivamente, determinándose cuatro puntos de la curva: P y S simétricos respecto al eje mayor, y sus respectivos simétricos Q y R respecto al eje menor.
- *Paso 3.-* Repitiendo el proceso con las siguientes divisiones *(2, 3...)* se obtienen puntos que luego se unen a mano alzada o con ayuda de una plantilla de curvas.

3.3.2 Construcción mediante circunferencias concéntricas (Método de afinidad).

- *Paso 1.-* Se dibujan dos circunferencias concéntricas de centro O y diámetros iguales a los ejes mayor y menor respectivamente.
- *Paso 2.-* Se trazan diámetros que cortarán a las dos circunferencias en dos puntos tales como M y N. Por ellos se trazan paralelas a los ejes principales, determinando, para cada caso, un punto P y su opuesto Q.
- *Paso 3.-* Repitiendo la operación se consiguen tantos puntos de la elipse como diámetros se tracen; normalmente, un máximo de seis es suficiente. La unión, a mano alzada o con plantilla, de los puntos obtenidos define la curva.

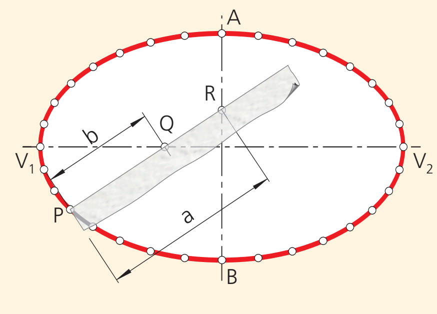
3.3.3 Construcción mediante el empleo de una tira de papel.

- *DATOS:* $2a=\overline{V_1V_2}$ y $2b=\overline{AB}$.

  Se marca sobre una tira de papel el segmento $\overline{PR}=a$ (semieje mayor) y el segmento $\overline{PQ}=b$ (semieje menor).

  La tira se desplaza sobre los dos ejes perpendiculares de la elipse, de tal manera que el punto R esté siempre sobre el eje menor y el punto Q sobre el eje mayor; marcando las distintas posiciones del punto P (extremo de la tira), se van obteniendo puntos de la elipse.

  Como siempre, para dibujar la elipse, utiliza una plantilla de curvas irregulares uniendo los puntos identificados anteriormente.



3.3.3 Construcción de la elipse empleando una tira de papel.

4 HIPÉRBOLA

4.1 Definición, parámetros y asíntotas.

«La hipérbola es una curva plana, abierta, con dos ramas que se definen como el lugar geométrico de los puntos del plano cuya diferencia de distancias a otros dos fijos F_1 y F_2, llamados focos, es constante e igual a la dimensión del eje real ($\overline{V_1V_2}$)».

Esto es, para cualquier punto P de la curva, la diferencia de sus radios vectores es constante:

$$\overline{PF_1} - \overline{PF_2} = \overline{V_1V_2} = 2a$$

- ***Parámetros:***

  2a: longitud del eje real ($\overline{V_1V_2}$).

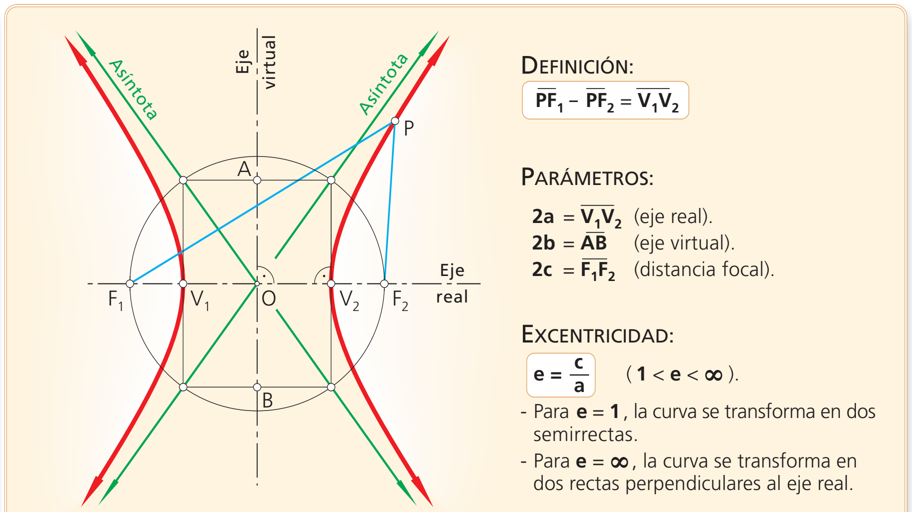
  2b: magnitud del eje virtual ($\overline{AB}$).

  2c: distancia focal ($\overline{F_1F_2}$).

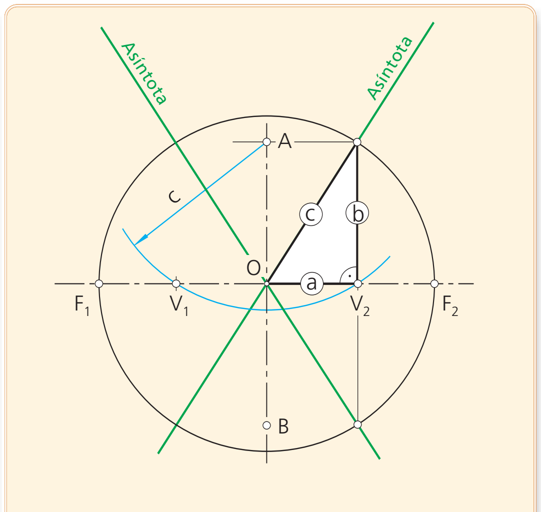
- ***Asíntotas:***

  Son las rectas tangentes a la hipérbola en los puntos del infinito. Son simétricas respecto de los ejes y pasan por el centro O de la curva.

  Cuando las asíntotas forman *45°* con los ejes, la hipérbola toma el calificativo de ***equilátera***.



4.1 Características de la hipérbola.



4.2 Determinación de **b** y las asíntotas.

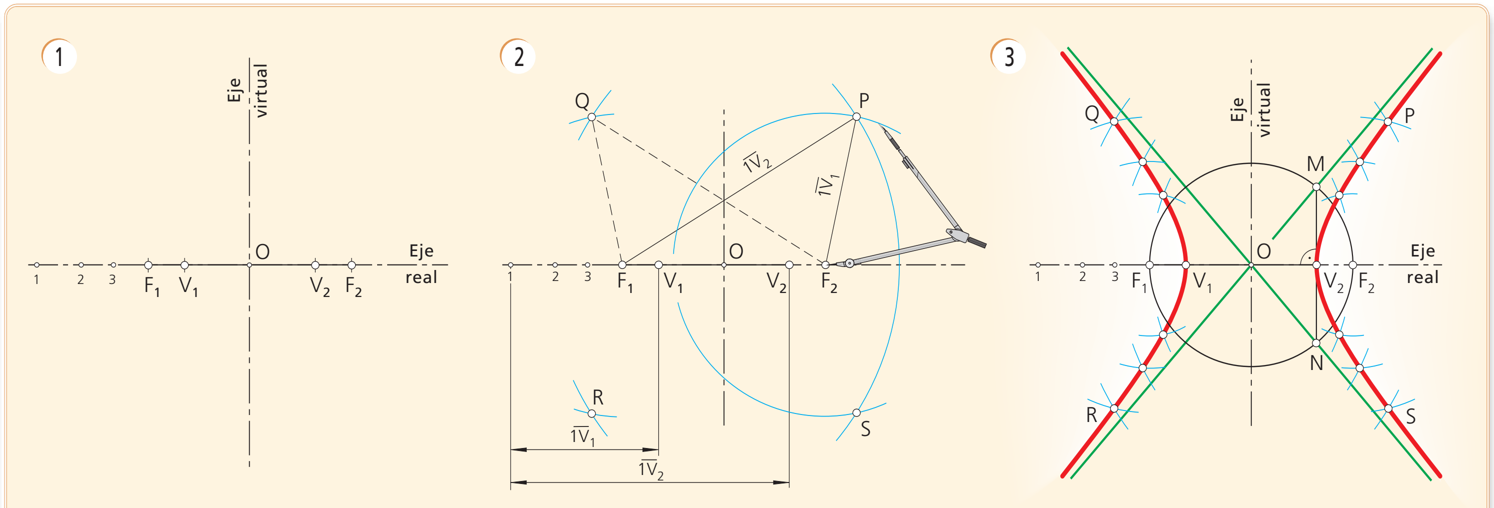
4.2 Propiedades fundamentales.

- ***Simetría:*** la hipérbola tiene dos ejes de simetría perpendiculares entre sí que se cortan en el punto O, centro de la cónica.
- ***Ejes:*** el eje que pasa por los vértices V_1 y V_2 de la curva se llama ***eje real*** y vale *2a;* el perpendicular al anterior en su punto medio O toma el nombre ***eje imaginario** o **virtual***. Sobre él, la distancia $\overline{AB}$ es la magnitud del parámetro *2b*, cumpliéndose $a^2 + b^2 = c^2$; es decir, el semieje real y el semieje virtual son catetos de un triángulo rectángulo que tiene por hipotenusa la semidistancia focal. Dicha hipotenusa marca la dirección de las asíntotas de la hipérbola.
- ***Radios vectores:*** son las rectas que unen cada punto P de la curva con los dos focos F_1 y F_2, verificándose que: $\overline{PF_1} - \overline{PF_2} = 2a$.
- ***Excentricidad:*** es el cociente de c/a. Su valor está comprendido entre *uno* e *infinito*.

4.3 Trazado de hipérbola por puntos.

- *DATOS:* Parámetros *2a* ($\overline{V_1V_2}$) y *2c* ($\overline{F_1F_2}$).
- *Paso 1.-* En el eje real se sitúan los vértices V_1, V_2 y los focos F_1 y F_2, respectivamente. Posteriormente, se posicionan divisiones arbitrarias (*1, 2, 3…*) a la izquierda del foco F_1.
- *Paso 2.-* Se trazan cuatro arcos de radio $\overline{1V_1}$ y $\overline{1V_2}$ con centro en F_1 y F_2, respectivamente, que determinan cuatro puntos (*P, Q, R, S*) de la curva, simétricos respecto a los ejes.
- *Paso 3.-* Repitiendo el proceso con las otras marcas (*2, 3,…*) se van obteniendo puntos que luego se unen a mano alzada o con ayuda de una plantilla de curvas.

  Antes de delinear las curvas es aconsejable trazar las asíntotas de la hipérbola, puesto que sirven de guía para definir rápida y cómodamente la trayectoria de ambas ramas.



4.3 Construcción de la hipérbola por puntos de acuerdo a su definición como lugar geométrico.

5 PARÁBOLA

5.1 Definición y parámetro.

«La parábola es una curva plana, abierta y de una sola rama, que se define como lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo F, llamado foco y de una recta fija d, llamada directriz».

Esto es, para cualquier punto P de la curva, la distancia al foco F es igual que a la recta directriz; verificándose que:

$$\overline{PF} \doteq \overline{PM}$$

- ***Parámetro:***

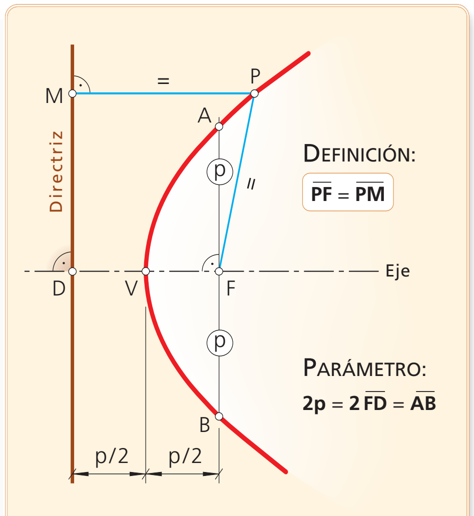
  La curva tiene un único parámetro, designado por p del cual depende su forma y configuración: $2p = 2\,\overline{FD}$.

  Esto es, la mitad de la distancia entre el foco F y la directriz d; o lo que es lo mismo, la distancia entre A y B, puntos de la curva simétricos, respecto al eje, y situados en la vertical del foco.

5.2 Propiedades fundamentales.

- ***Eje:*** la parábola tiene un eje perpendicular a la directriz, que contiene al foco F y al vértice V y, además, es eje de simetría de la cónica.
- ***Vértice:*** se encuentra en el eje y es el punto medio del segmento $\overline{DF}$.
- ***Parámetro:*** el segmento $\overline{FD}$ dado (en magnitud y posición) determina la parábola: el parámetro p singulariza a la curva, lo que significa que todas las parábolas son semejantes.

  La distancia entre los puntos A y B, como puntos de intersección de la recta que pasa por el foco y es perpendicular al eje, es igual a *2p*.
- ***Directriz:*** es el lugar geométrico de los puntos simétricos del foco respecto de cada tangente a la parábola.
- ***Radios vectores:*** son las rectas $\overline{PF}$ y $\overline{PM}$ que unen cada punto de la parábola con el foco y con la directriz.



5.2 Características de la parábola.

5.3 Trazados de la parábola.

5.3.1 Construcción por puntos.

- *DATOS:* Parámetro *2p*.
- *Paso 1.-* Se comienza por dibujar el eje y la directriz de la curva. Sobre el eje se sitúa el vértice *(V)* y el foco *(F)*, teniendo en cuenta que $\overline{FV} = \overline{VD} = p/2$.

  Se toman puntos auxiliares, tales como *1, 2, 3...*, sobre el eje (situados a partir del vértice y en sentido contrario a la ubicación de la directriz).
- *Paso 2.-* Por dichos puntos se trazan paralelas a la directriz sobre las cuales, en su respectivas intersecciones con los arcos de centro *F* y radios $\overline{1D}, \overline{2D}, \overline{3D}...$, se van obteniendo puntos de la parábola y sus simétricos respecto al eje, como es el caso de *M y M'*.
- *Paso 3.-* La unión ordenada, y a mano alzada, de los puntos determinados define la trayectoria de la curva.

5.3.2 Construcción por haces proyectivos.

- *DATOS:* eje, vértice *V* y punto *P* de la parábola.
- *Paso 1.-* Se traza el punto *P'*, simétrico de *P* con respecto al eje. Se une *P* con *P'* y por el vértice *V* se traza una paralela a ésta, obteniéndose el rectángulo *APP'B*.

  Se dividen los segmentos $\overline{VA}, \overline{VB}, \overline{AP}$ *y* $\overline{BP'}$ en el mismo número de partes iguales, por ejemplo cuatro, y se numeran como indica la figura. A continuación se une el vértice *V* con las divisiones de los segmentos $\overline{AP}$ *y* $\overline{BP'}$ y se trazan rectas paralelas al eje por las divisiones homónimas de los segmentos $\overline{VA}$ *y* $\overline{VB}$. Las rectas que parten de la misma nominación se cortan en un punto (caso del *Q*) perteneciente a la curva.
- *Paso 2.-* La unión ordenada, y a mano alzada, de los puntos obtenidos dibuja la trayectoria de la curva.

6 LA CIRCUNFERENCIA FOCAL

6.1 En la elipse.

Son posibles dos circunferencias focales, una en cada foco. En la figura se ha representado la de centro F_1. Del dibujo se deduce que la circunferencia de centro el punto *P* y radio $\overline{PF_2}$ es tangente en F'_2 a la circunferencia focal. Como esto sucede en todos y cada uno de los puntos de la elipse, puede decirse que la elipse es: ***el lugar geométrico de todos los centros de las circunferencias que son tangentes a una circunferencia focal y que pasan por el otro foco.***

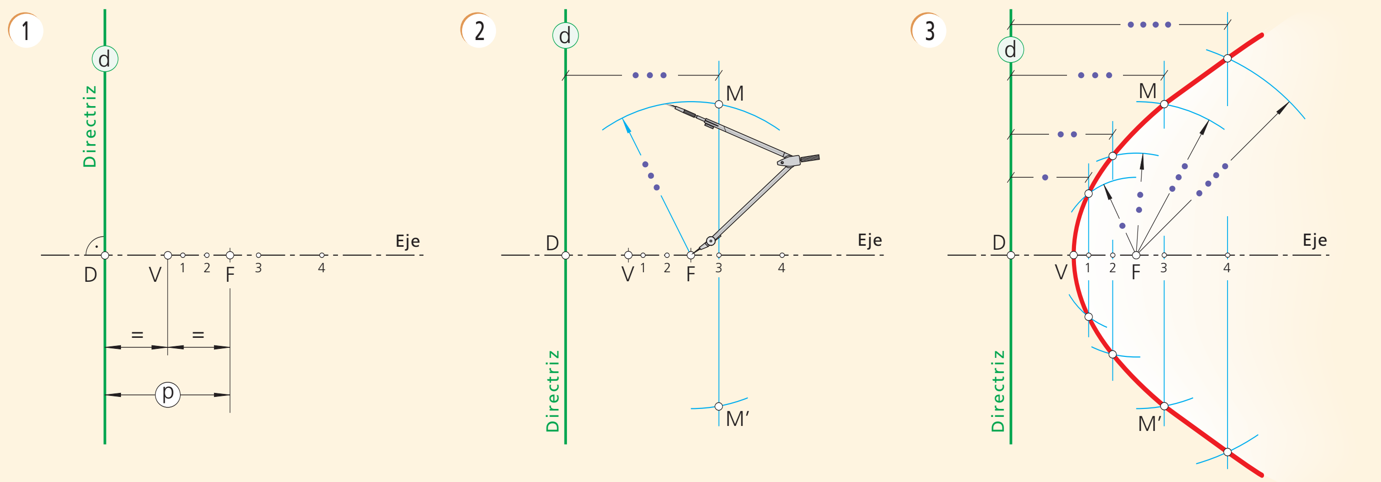
6.2 En la hipérbola.

También son posibles dos circunferencias focales. Con paralelo razonamiento al llevado a cabo en la elipse, puede darse análoga definición para la hipérbola como: ***lugar geométrico de todos los centros de las circunferencias que son tangentes a una circunferencia focal y que pasan por el otro foco.***

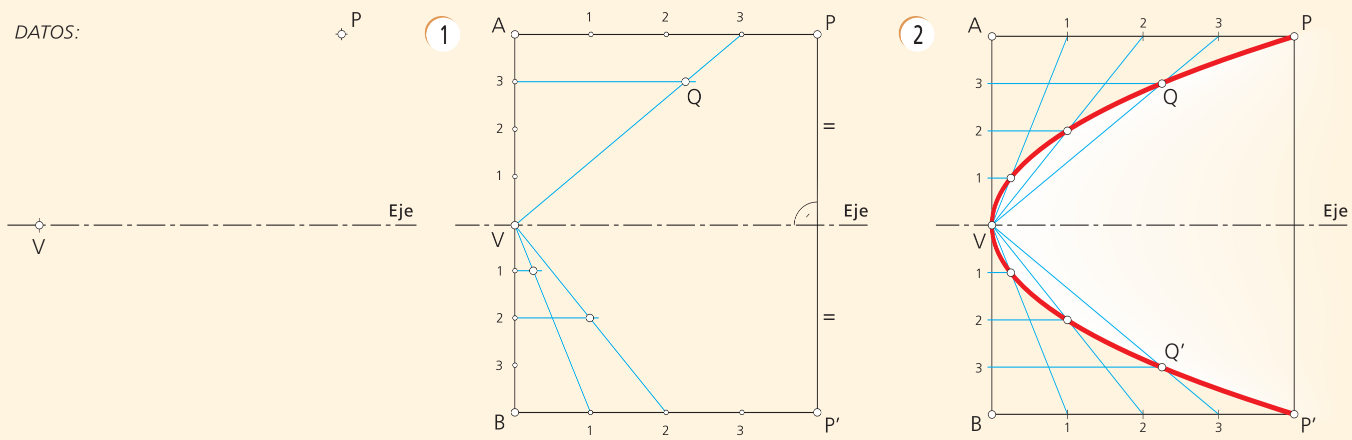
6.3 En la parábola.

En esta curva la circunferencia focal se transforma en la ***recta directriz***. De la figura adjunta se deduce que la parábola es: ***el lugar geométrico de todos los centros de las circunferencias tangentes a la directriz y que pasan por el foco de la cónica.***

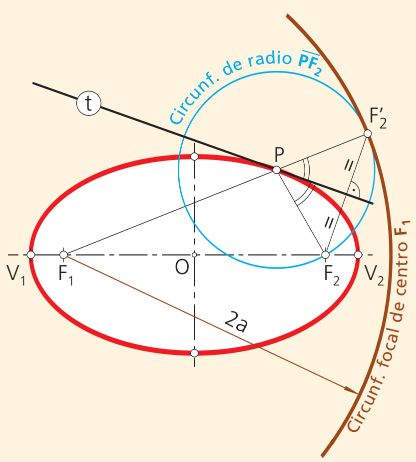
En las tres curvas la ***recta tangente*** en un punto *P* es bisectriz del ángulo que forman los radios vectores; en su ángulo externo para la elipse y en el interno para la hipérbola y la parábola, como se observa en las figuras.



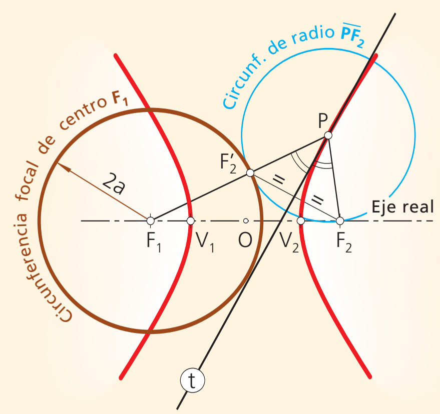
5.3.1 Construcción de la parábola por puntos, de acuerdo a su definición como lugar geométrico.



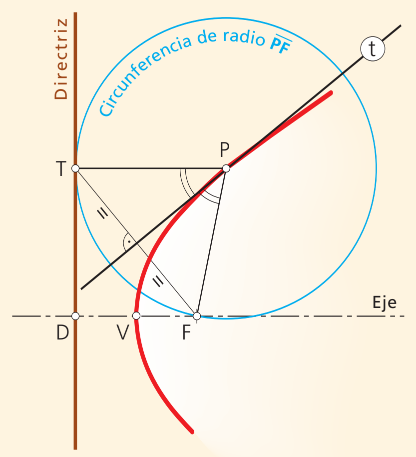
5.3.2 Construcción de la parábola por haces proyectivos.



6.1 Circunferencia focal en la elipse.



6.2 Circunferencia focal en la hipérbola.



6.3 Circunferencia focal en la parábola (de radio infinito): la recta directriz.

LA ELIPSE: TRAZADO Y DETERMINACIÓN DE SUS PARÁMETROS

nombre y apellidos

nº	curso/grupo	fecha

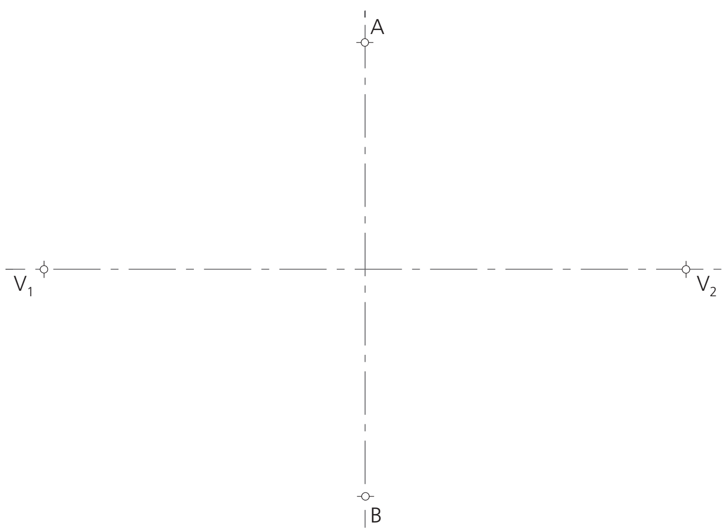
1. Dibuja la **ELIPSE** de parámetros **2a** = $\overline{V_1V_2}$ y **2b** = $\overline{AB}$ utilizando el «***Método de construcción por puntos***». Después, por el punto **T** de la elipse, situado en el **CUARTO CUADRANTE** y en la vertical del foco, representa la **TANGENTE** a la cónica.

2. Mediante el procedimiento de «***Construcción por circunferencias concéntricas (Método de afinidad)***», dibuja la **ELIPSE** conocida la situación de sus focos y un punto **P** de ella.

3. En un plano inclinado se han instalado dos **SOPORTES** fijos **P** y **Q**. En ellos se fija por sus extremos un **CABLE INEXTENSIBLE** de **6** metros del que cuelga, mediante una argolla, un objeto pesado. Al tensarse el cable, el objeto adoptará la **POSICIÓN DE EQUILIBRIO** como muestra el **ESQUEMA**.

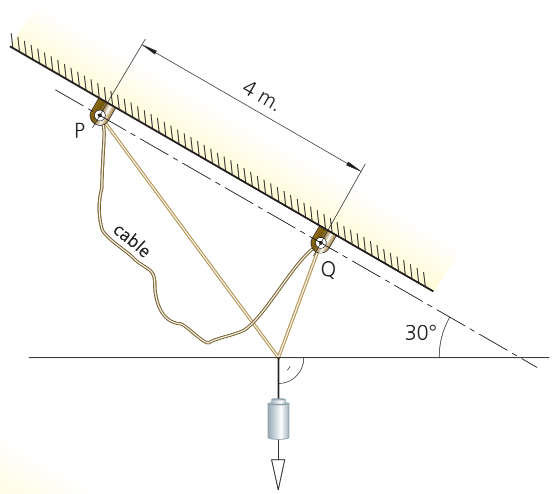
Dibuja, a escala **1/50**, la citada posición. Razona, gráficamente, la respuesta.

1 *CONSTRUCCIÓN DE LA ELIPSE POR PUNTOS*

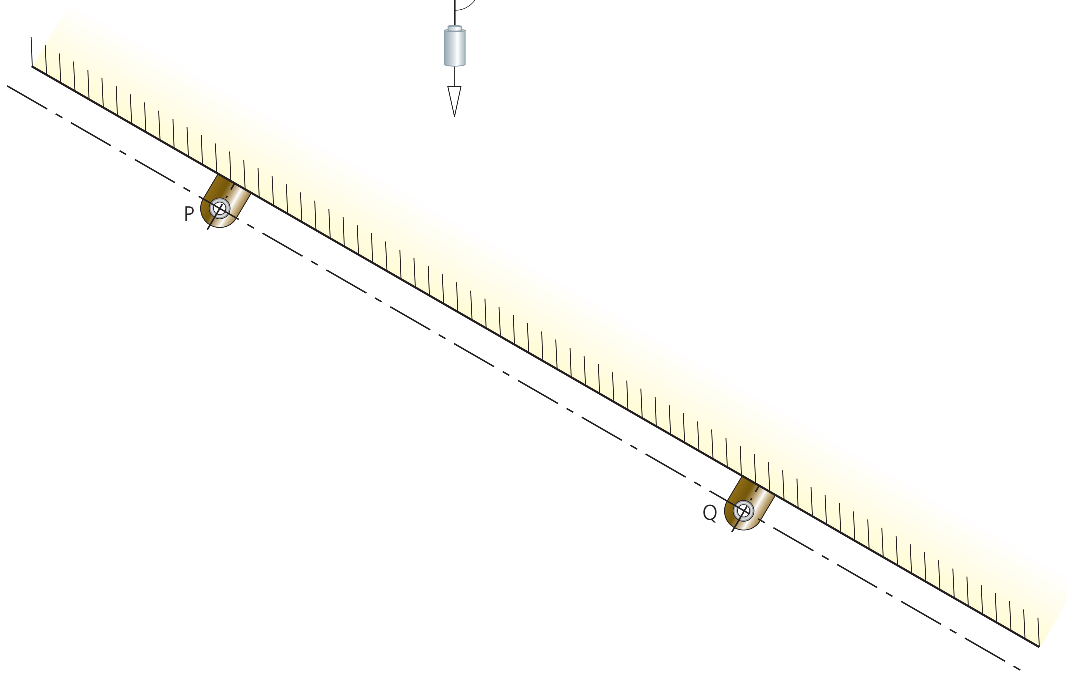


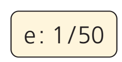
2 *CONSTRUCCIÓN DE LA ELIPSE POR AFINIDAD*

3 *SOPORTE SITUADO EN UN PLANO INCLINADO*



ESQUEMA
DE SITUACIÓN





LA ELIPSE: TRAZADO Y DETERMINACIÓN DE SUS PARÁMETROS

nombre y apellidos

nº	curso/grupo	fecha

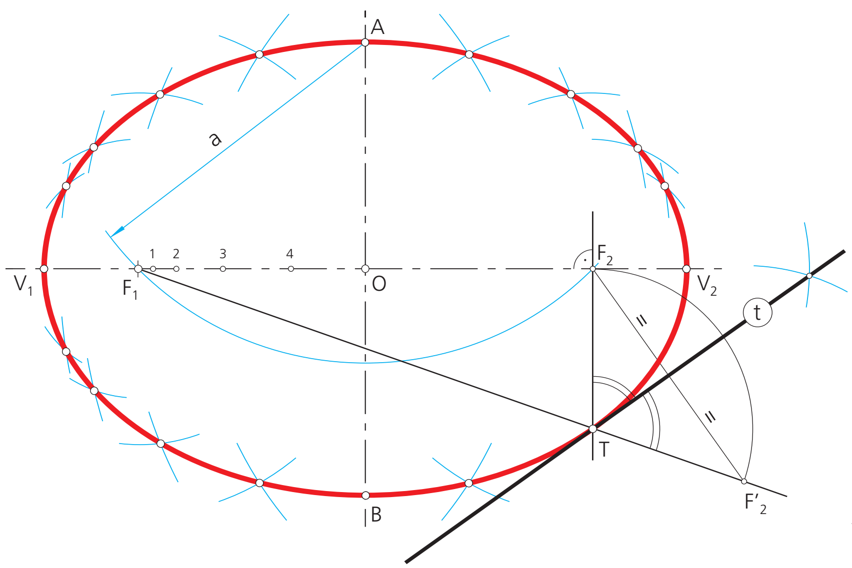
1. Dibuja la **ELIPSE** de parámetros $\mathbf{2a} = \overline{\mathbf{V_1V_2}}$ y $\mathbf{2b} = \overline{\mathbf{AB}}$ utilizando el *«Método de construcción por puntos»*. Después, por el punto **T** de la elipse, situado en el **CUARTO CUADRANTE** y en la vertical del foco, representa la **TANGENTE** a la cónica.

2. Mediante el procedimiento de *«Construcción por circunferencias concéntricas (Método de afinidad)»*, dibuja la **ELIPSE** conocida la situación de sus focos y un punto **P** de ella.

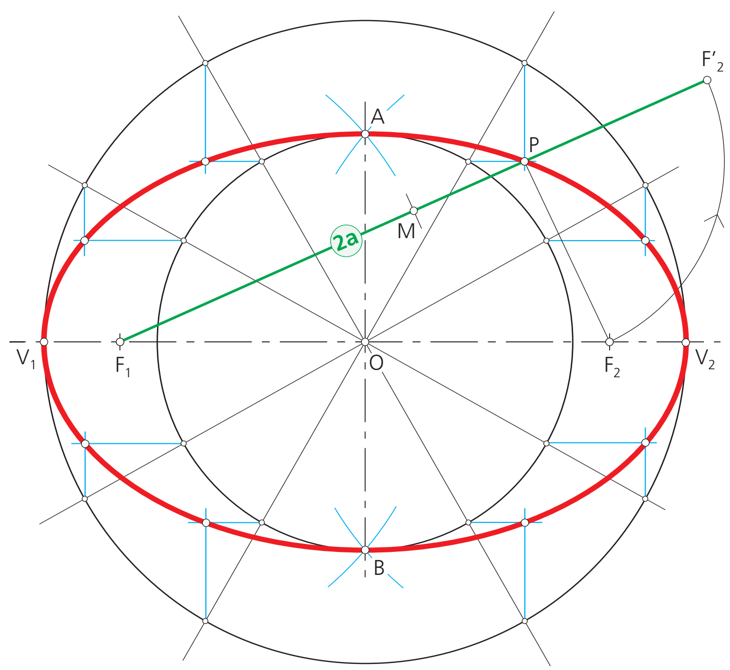
3. En un plano inclinado se han instalado dos **SOPORTES** fijos **P** y **Q**. En ellos se fija por sus extremos un **CABLE INEXTENSIBLE** de **6** metros del que cuelga, mediante una argolla, un objeto pesado. Al tensarse el cable, el objeto adoptará la **POSICIÓN DE EQUILIBRIO** como muestra el **ESQUEMA**.

Dibuja, a escala **1/50**, la citada posición. Razona, gráficamente, la respuesta.

1 *CONSTRUCCIÓN DE LA ELIPSE POR PUNTOS*

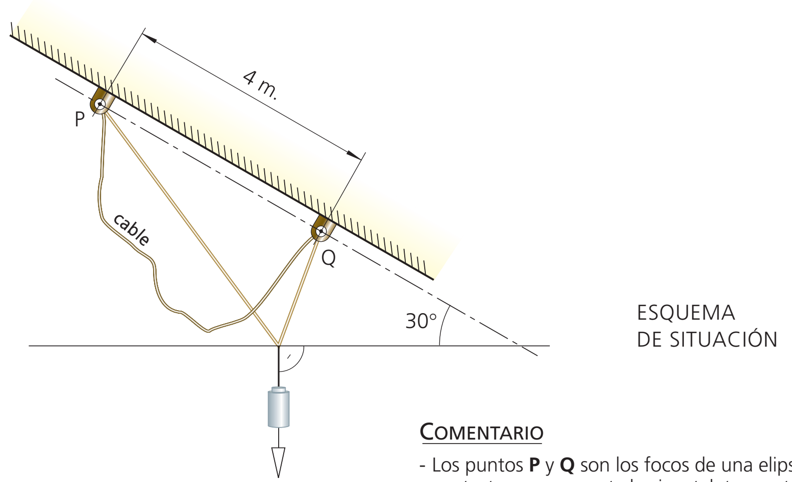


2 *CONSTRUCCIÓN DE LA ELIPSE POR AFINIDAD*



$\overline{F_1P} + \overline{PF_2} = \overline{F_1P} + \overline{PF'_2} = \overline{F_1F'_2} = 2a$; $\overline{F_1M} = \overline{MF_2} = a = \overline{V_1O} = \overline{OV_2}$

3 *SOPORTE SITUADO EN UN PLANO INCLINADO*

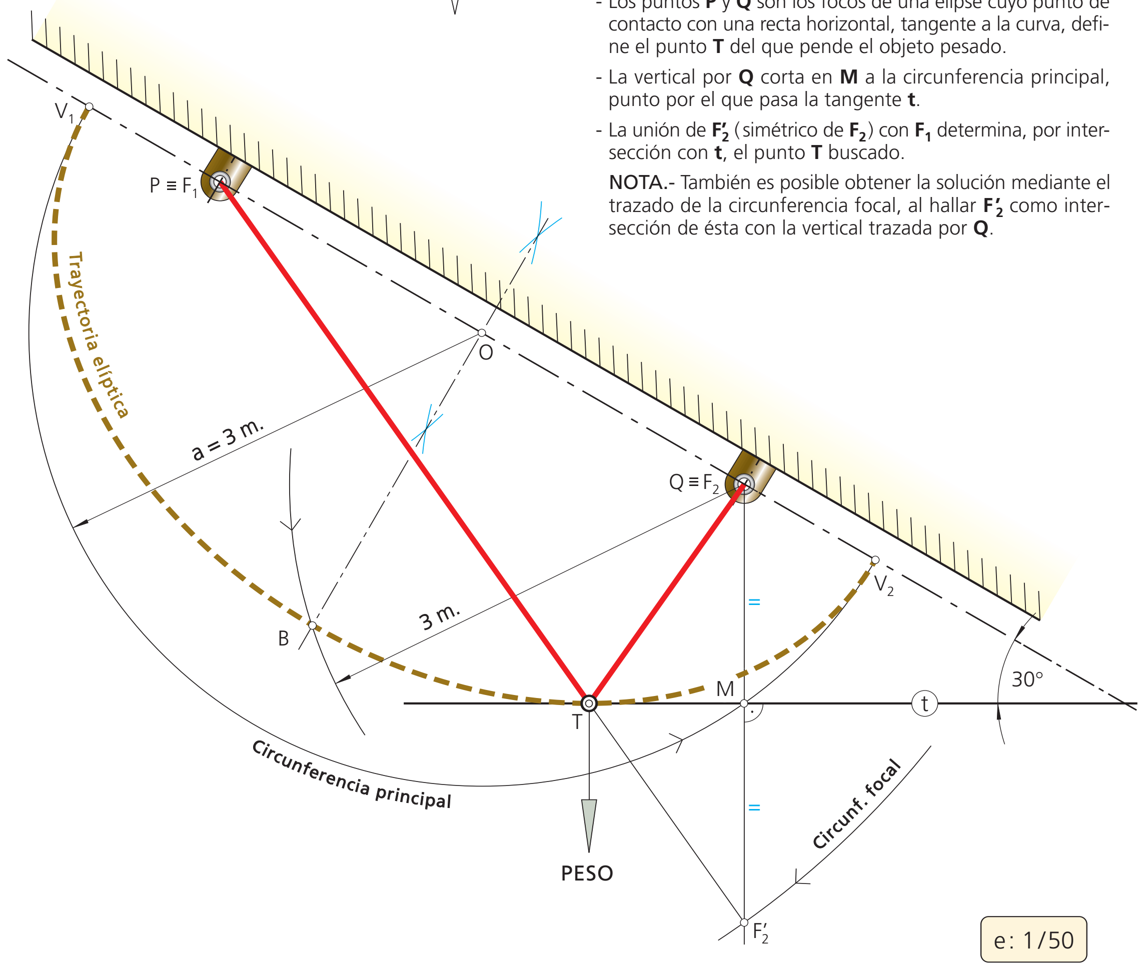


ESQUEMA
DE SITUACIÓN

COMENTARIO

- Los puntos **P** y **Q** son los focos de una elipse cuyo punto de contacto con una recta horizontal, tangente a la curva, define el punto **T** del que pende el objeto pesado.
- La vertical por **Q** corta en **M** a la circunferencia principal, punto por el que pasa la tangente **t**.
- La unión de $\mathbf{F'_2}$ (simétrico de $\mathbf{F_2}$) con $\mathbf{F_1}$ determina, por intersección con **t**, el punto **T** buscado.

NOTA.- También es posible obtener la solución mediante el trazado de la circunferencia focal, al hallar $\mathbf{F'_2}$ como intersección de ésta con la vertical trazada por **Q**.



e: 1/50

VERIFICACIONES

1. Definir la **ELIPSE** como **LUGAR GEOMÉTRICO**.
2. El concepto de excentricidad, representado por **e**, es la razón **c / a**. En la **ELIPSE** su valor está comprendido entre **0** y **1**. ¿Qué forma toma la **CÓNICA** para dichos valores extremos? Razona la respuesta.
3. Confeccionar un listado, no inferior a **CINCO OBJETOS**, que sean representativos de **ELIPSES** frecuentes en nuestra **VIDA COTIDIANA**, en la **TÉCNICA** o en el **ARTE**.

VERIFICACIONES

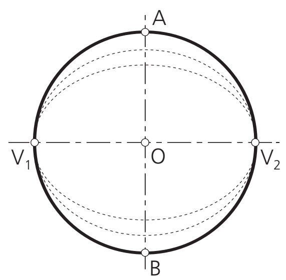
1. **Definir la ELIPSE como LUGAR GEOMÉTRICO.**

   La elipse es el lugar geométrico de los puntos que cuplen con la condición de que la suma de distancias a otros dos fijos $\mathbf{F_1}$ y $\mathbf{F_2}$, llamados focos, es constante e igual a **2a**, siendo **2a** la longitud del eje mayor de la elipse.

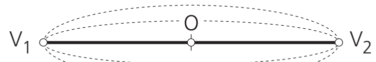
2. **El concepto de excentricidad, representado por e, es la razón c/a. En la ELIPSE su valor está comprendido entre 0 y 1.**
   ¿Qué forma toma la CÓNICA para dichos valores extremos? Razona la respuesta.

   En la ELIPSE los valores entre los que se mueve la excentricidad están comprendidos entre cero y uno; esto es: $\mathbf{0 < c < 1}$.

- Si **c** se aproxima a **0**, la excentricidad **e = c / a** tiende a cero. En este caso, los dos focos se confundirán en un solo punto y la distancia al mismo de todos los puntos de la curva es constante: la elipse se convierte en una **circunferencia**.



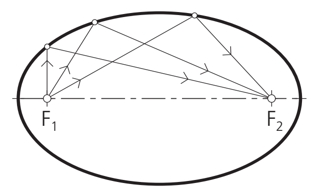
- Si **c** se aproxima al valor **a**, la excentricidad **e = c / a** tiende a uno. En este caso, los extremos de eje menor se aproximan al centro de la elipse y ésta tiende a confundirse con el eje mayor: la curva se reduce al segmento $\overline{\mathbf{V_1V_2}}$.



A ≡ B ≡ O

3. **Confeccionar un listado, no inferior a CINCO OBJETOS, que sean representativos de ELIPSES frecuentes en nuestra VIDA COTIDIANA, en la TÉCNICA o en el ARTE.**

   Basándose en la propiedad que tienen los rayos que parten de un foco de la elipse y se reflejan en la cónica para pasar o llegar al otro foco, se han inventado, y actualmente se diseñan, diversos objetos.



- En el siglo XVII, el astrofísico *Kepler* observó la gran utilidad de las cónicas en astronomía al constatar que las **trayectorias de los planetas** alrededor del Sol son **elípticas**, llegando a enunciar sus tres conocidas leyes sobre el movimiento de los planetas. El enunciado de la primera dice: *«los planetas se mueven alrededor del Sol siguiendo órbitas elípticas en uno de cuyos focos se encuentra el Sol»*.

  La órbita de la *Tierra* es una elipse de excentricidad casi nula (próxima a la circunferencia); la del planeta *Plutón*, es una elipse pronunciada, y la del cometa *Halley*, una elipse muy achatada (excentricidad próxima a la unidad).

- En la Edad Media se construían **bóvedas elipsoidales** para divertimento de los habitantes de los castillos, pues alguién se situaba en uno de los focos y podía mantener una conversación con otra persona que estuviera en el otro foco, sin que otras personas más próximas se enteraran.

  Una cúpula elipsoidal famosa es la de *Statuary Hall* del *Capitolio en Washington*; en nuestro país un buen ejemplo lo tenemos en la *Alhambra de Granada*: la *Cámara de los Secretos* o *Cripta de Carlos V.*

- En la naturaleza aparecen con bastante frecuencia las figuras geométricas con **formas cónicas**. Desde los objetos cercanos como los cantos rodados o algunas frutas, como los melones, cuyas formas se aproximan a los elipsoides, hasta los más alejados como las galaxias formadas por un núcleo denso y varios brazos con formas cónicas, el cosmos está plagado de geometría que recuerda y se ajusta a este tipo de curva.
- El corte oblicuo en los embutidos cilíndricos (salchichón, fuet, etc.) es una **elipse**.
- La curva base y superior de algunas latas de conserva, es una **elipse**.
- El borde que dibuja el líquido en un recipiente circular inclinado, es una **elipse**.
- La contemplación de una mesa ya preparada, a la hora de comer, es una sinfonía de observación de **elipses**: platos, vasos, fuentes, bandejas, fruteros, etc.
- Los envases de muchos productos, los logotipos de marcas, las etiquetas, etc., adoptan con frecuencia formas **elípticas** (no confundir con formas ovaladas, cuyos diseños tienen, asimismo, gran proliferación).
- Diseños de piezas de joyería y bisutería, estampados de vestidos, telas decorativas, corbatas, etc., son elementos en donde pueden encontrarse formas **elípticas**.

APLICACIÓN ELÍPTICA Y CONSTRUCCIÓN DE LA HIPÉRBOLA

nombre y apellidos

nº | curso/grupo | fecha

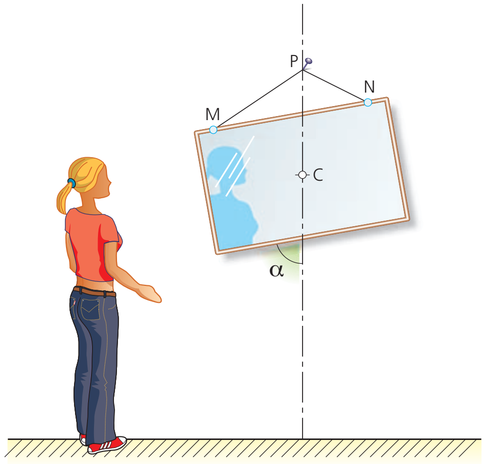
1. La figura delineada, a escala **1/10**, representa un **ESPEJO RECTANGULAR** con dos **ARMELLAS**, equidistantes de su centro **C**, que está colgado de una escarpia **P** (según muestra el esquema) mediante un cordón de **70** cm. de longitud. El espejo se cuelga **MAL EQUILIBRADO** en la pared dado que la vertical, que pasa por su centro **C**, no forma ángulo recto con los lados mayores del marco.

Calcula el ángulo α cuando un **RAMAL** del **CORDÓN** mide **48** cm.

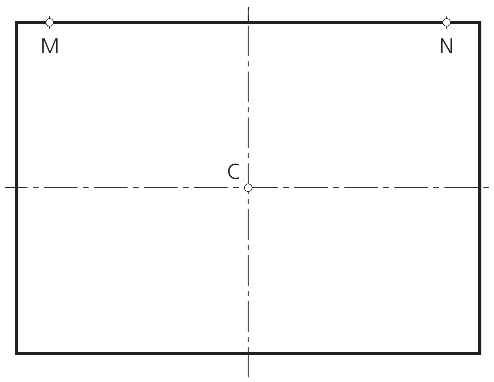
2. Dibuja, por el procedimiento de «*Construcción por puntos*» una **HIPÉRBOLA** de parámetros **$2a = \overline{V_1V_2}$** y **$2c = \overline{F_1F_2}$**.

3. Dibuja una **HIPÉRBOLA** y sus **ASÍNTOTAS** por el procedimiento de «*Construcción por puntos*». DATOS: **2a** = 52 mm. y **2b** = 44 mm. Asimismo, traza la **TANGENTE** por un punto **T** de la **RAMA DERECHA** de la curva, situado en la vertical del foco y en su parte superior; esto es, en el cuadrante superior derecho.

1 *ESPEJO DESEQUILIBRADO*



ESQUEMA DE SITUACIÓN DEL ESPEJO



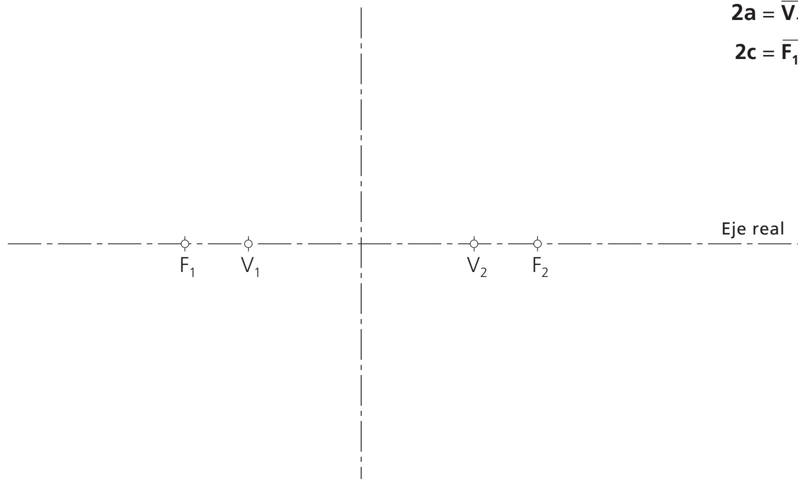
e: 1/10

2 *CONSTRUCCIÓN DE LA HIPÉRBOLA POR PUNTOS*

DATOS:

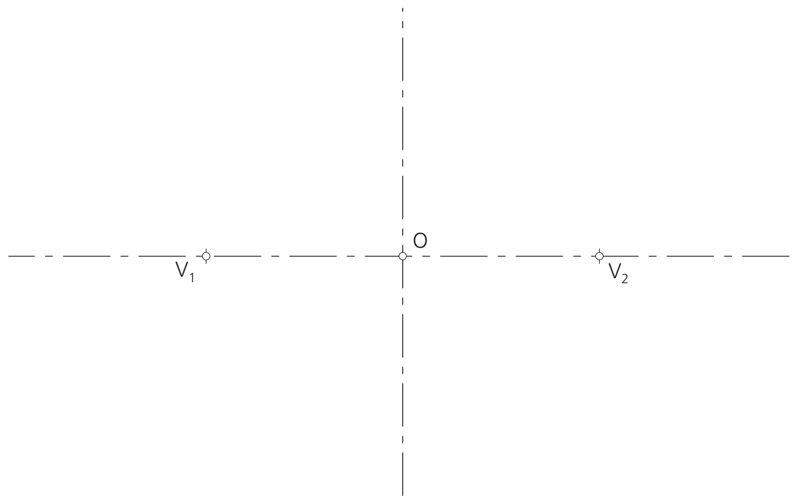
2a = $\overline{V_1V_2}$

2c = $\overline{F_1F_2}$



3 *HIPÉRBOLA: TERCER PARÁMETRO, ASÍNTOTAS Y TANGENTE*

DATOS: **2a** = 52 mm.
2b = 44 mm.



APLICACIÓN ELÍPTICA Y CONSTRUCCIÓN DE LA HIPÉRBOLA

nombre y apellidos

nº	curso/grupo	fecha

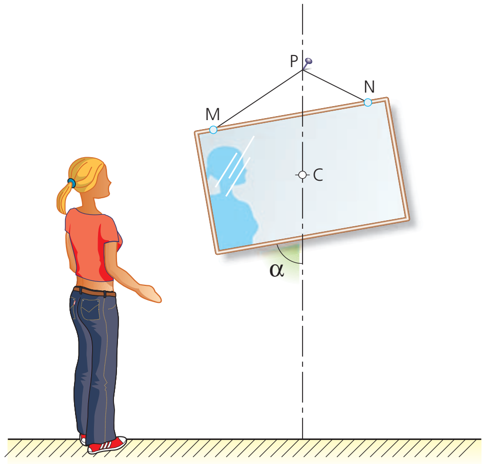
1. La figura delineada, a escala **1/10**, representa un **ESPEJO RECTANGULAR** con dos **ARMELLAS**, equidistantes de su centro **C**, que está colgado de una escarpia **P** (según muestra el esquema) mediante un cordón de **70** cm. de longitud. El espejo se cuelga **MAL EQUILIBRADO** en la pared dado que la vertical, que pasa por su centro **C**, no forma ángulo recto con los lados mayores del marco.

Calcula el ángulo **α** cuando un **RAMAL** del **CORDÓN** mide **48** cm.

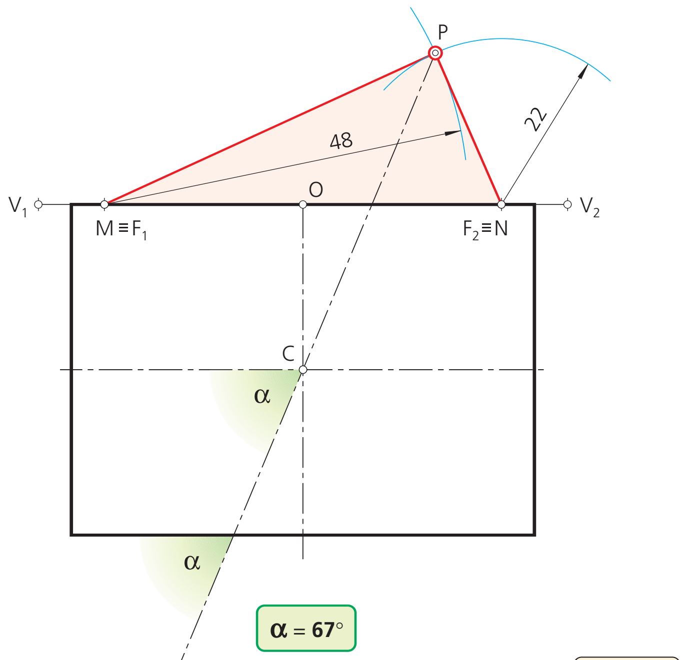
2. Dibuja, por el procedimiento de *«Construcción por puntos»* una **HIPÉRBOLA** de parámetros **2a** = $\overline{V_1V_2}$ y **2c** = $\overline{F_1F_2}$.

3. Dibuja una **HIPÉRBOLA** y sus **ASÍNTOTAS** por el procedimiento de *«Construcción por puntos»*. DATOS: **2a** = 52 mm. y **2b** = 44 mm. Asimismo, traza la **TANGENTE** por un punto **T** de la **RAMA DERECHA** de la curva, situado en la vertical del foco y en su parte superior; esto es, en el cuadrante superior derecho.

1 *ESPEJO DESEQUILIBRADO*



ESQUEMA DE SITUACIÓN DEL ESPEJO



e: 1/10

COMENTARIO

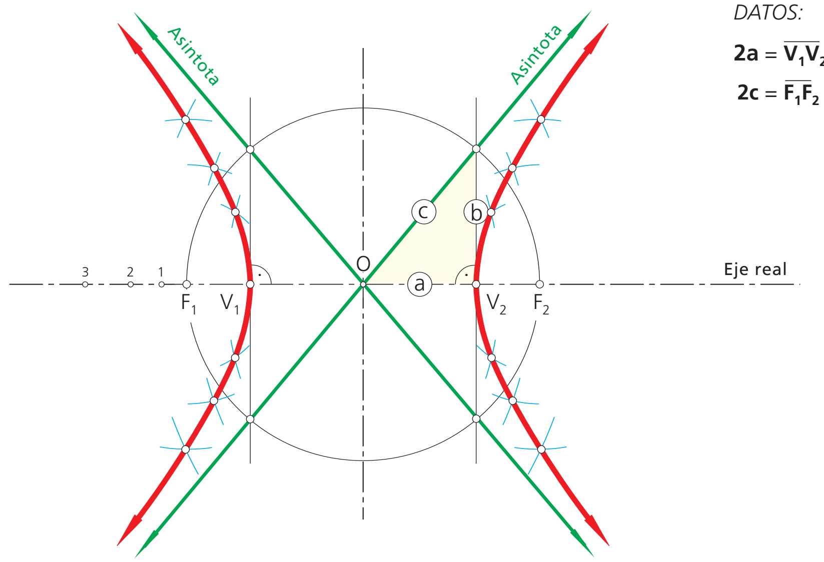
- El ejercicio se resuelve tratándolo como una trayectoria elíptica, donde las armellas **M** y **N** son los focos, y la longitud del cordón (**70** cm.) es igual al parámetro **2a**.
- Para determinar **P** se trazan, con centro en los focos, arcos de radio **48** y (**70 – 48**) cm. respectivamente. La recta **PC** define, con la horizontal, el ángulo **α**.

2 *CONSTRUCCIÓN DE LA HIPÉRBOLA POR PUNTOS*

DATOS:

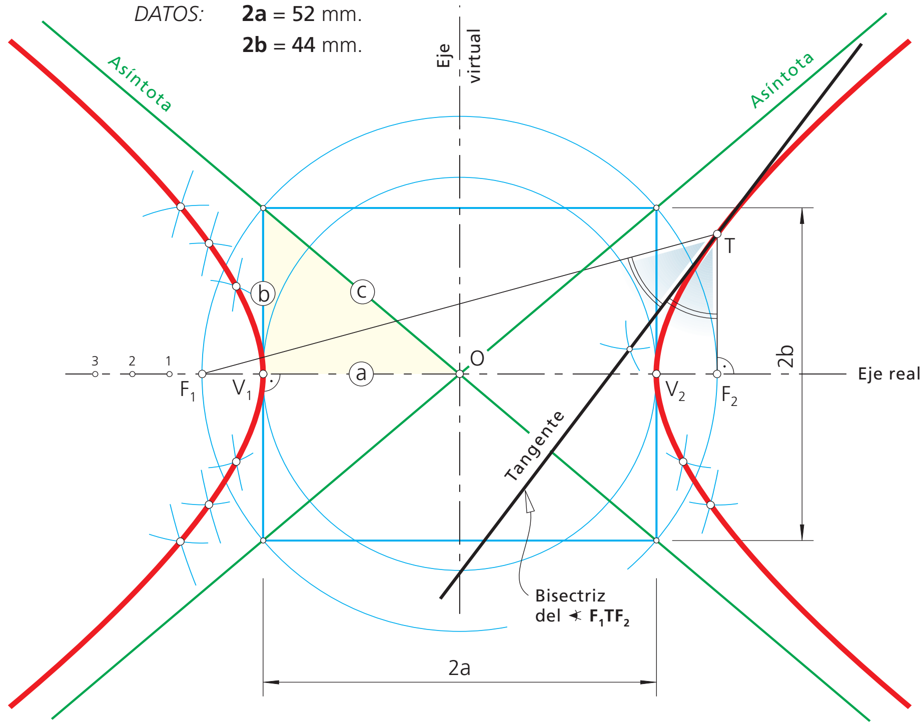
2a = $\overline{V_1V_2}$

2c = $\overline{F_1F_2}$



3 *HIPÉRBOLA: TERCER PARÁMETRO, ASÍNTOTAS Y TANGENTE*

DATOS: **2a** = 52 mm.
2b = 44 mm.



VERIFICACIONES

1. Definir la **HIPÉRBOLA** como **LUGAR GEOMÉTRICO**.
2. El concepto de excentricidad, representado por **e**, es la razón **c / a**. En la **HIPÉRBOLA** su valor está comprendido entre **1** e infinito.
   ¿Qué forma toma la **CÓNICA** para dichos valores extremos? Razona la respuesta.
3. Confeccionar un listado, no inferior a **TRES OBJETOS**, que sean representativos de **HIPÉRBOLAS** y **PARÁBOLAS** frecuentes en nuestra **VIDA COTIDIANA**, en la **TÉCNICA** o en el **ARTE**.

VERIFICACIONES

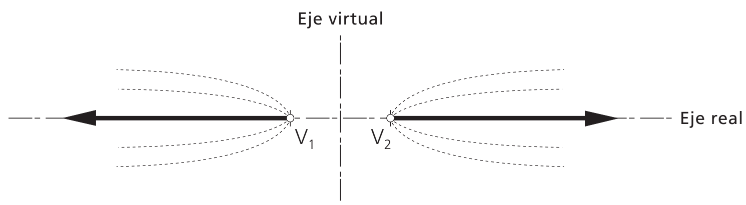
1. **Definir la HIPÉRBOLA como LUGAR GEOMÉTRICO.**

   La hipérbola es una curva plana, abierta, con dos ramas que se definen como el lugar geométrico de los puntos del plano cuya diferencia de distancias a otros dos fijos $\mathbf{F_1}$ y $\mathbf{F_2}$, llamados focos, es constante e igual a la dimensión del eje real.

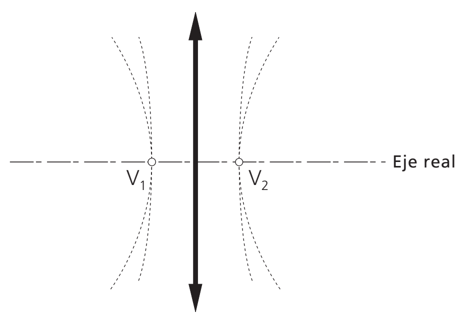
2. **El concepto de excentricidad, representado por e, es la razón c/a. En la HIPÉRBOLA su valor está comprendido entre 1 e infinito.**
   ¿Qué forma toma la CÓNICA para dichos valores extremos? Razonar la respuesta.

   En la HIPÉRBOLA los valores entre los que se mueve la excentricidad están comprendidos entre uno e infinito; esto es: $\mathbf{1 < c < \infty}$.

- Si **c** se aproxima al valor **a**, la excentricidad **e = c / a** tiende a uno. En este caso, las dos ramas se cierran cada vez más y se aproximan a dos semirrectas opuestas de origen $\mathbf{V_1}$ y $\mathbf{V_2}$, simétricas (respecto del eje imaginario o virtual) y contenidas en el eje focal (real).

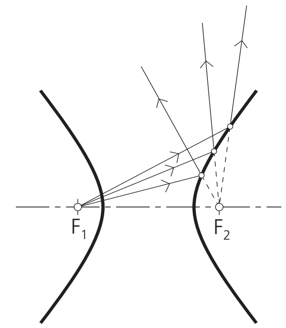


- Si **c** se hace cada vez mayor, la excentricidad se hace también mayor. En este caso, las dos ramas se abren cada vez más y se aproximan a dos rectas perpendiculares al eje real por $\mathbf{V_1}$ y $\mathbf{V_2}$; esto es, ambas ramas se aproximan al eje imaginario o virtual, dado que el parámetro $\mathbf{a = \overline{V_1V_2}}$ toma el valor **0**.



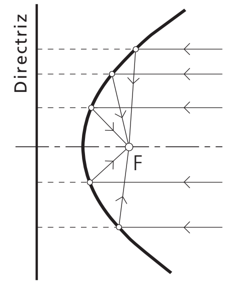
3. **Confeccionar un listado, no inferior a TRES OBJETOS, que sean representativos de HIPÉRBOLAS y PARÁBOLAS frecuentes en nuestra VIDA COTIDIANA, en la TÉCNICA o en el ARTE.**

   Análogamente a lo que sucede en la elipse, en la hipérbola los rayos que parten de un foco se reflejan en la cónica y pasan por el otro foco o perpendicularmente a la directriz, en el caso de la parábola. Esta propiedad trae consigo la fabricación de diversos objetos y, es base de numerosos inventos.



- **La luz de una lámpara de pie con pantalla** cilíndrica o troncocónica produce sobre la pared un recinto iluminado con forma de **elipse**, **hipérbola** o **parábola** según se varíe la inclinación del pie respecto del suelo.

  Análogo fenómeno sucede con las sombras producidas por una pelota al iluminarla con una linterna cuyo haz luminoso forme un cono de revolución.



- En el siglo XVI, un polifacético hombre del Renacimiento italiano, *Francesco Maurolico*, muestra que, cuando el sol ilumina durante un día un **«gnomon»** (aguja o **estaca clavada en una superficie**), la sombra proyectada por el vértice produce una curva cónica. En particular, cuando el gnomon está clavado perpendicularmente en un plano (como en general sucede en los relojes de sol) entonces la sombra proyectada por su vértice sobre este plano a lo largo de un día tiene forma de **hipérbola**.
- *Galileo*, en sus estudios de mecánica, detectó la presencia de **curvas parabólicas** en las **trayectorias de los misiles** de un cañón (despreciando la resistencia del aire). Recuérdese la trayectoria descrita por la flecha que encendió la llama olímpica y marcó el inicio de los Juegos Olímpicos en Barcelona 92.
- Las cónicas, particularmente la **parábola**, tienen propiedades muy interesantes relativas a la **reflexión de radiaciones electromagnéticas**: para concentrar en su foco ciertas ondas o señales paralelas al eje o para proyectar paralelamente al eje las que emita un dispositivo colocado en este punto. Los reflectores parabólicos de faros, proyectores de seguimiento, calefactores eléctricos, etc., tienen como misión reflejar en la dirección paralela al eje las respectivas radiaciones emitidas desde una fuente situada en el foco del espejo.
- En arquitectura, los arcos curvilíneos de **ventanales**, **puertas**, **puentes**, **viaductos**, etc. constituyen una de las presencias más visibles de los lugares geométricos determinados por **curvas cónicas**.

LA PARÁBOLA: TRAZADO Y DETERMINACIÓN DE SUS PARÁMETROS

nombre y apellidos

nº	curso/grupo	fecha

1. Se conocen el eje, el foco **F** y el parámetro **p** = $\overline{\textbf{FD}}$ de una PARÁBOLA. Dibuja, mediante la ***«Construcción por puntos»***, la CURVA, y sitúa por ENCIMA del EJE un punto **T** distante **28** mm. del foco. Asimismo, traza, por dicho punto, la RECTA TANGENTE a la CÓNICA.

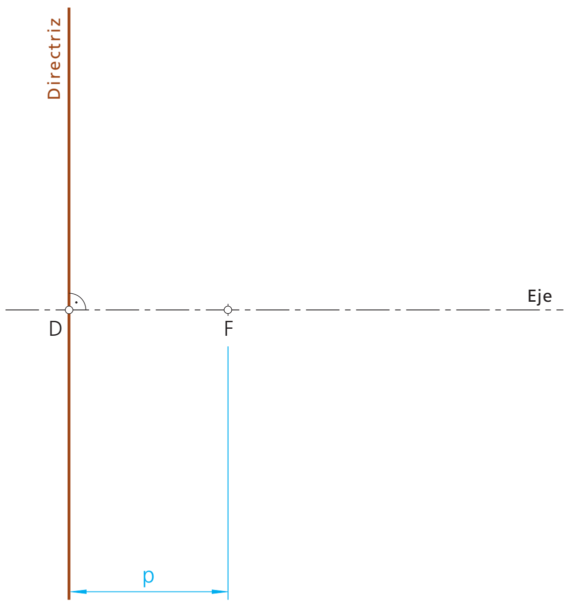
2. Determina el EJE, el VÉRTICE y la DIRECTRIZ de la PARÁBOLA definida por el foco **F** y un par de puntos **A** y **B** de la cónica. ¿Cuántas soluciones pueden darse? Da respuesta gráfica a cada una de ellas.

3. La situación de los puntos **F** (foco) y **V** (vértice) define la DISTANCIA RELATIVA necesaria para determinar una PARÁBOLA.

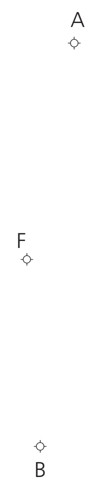
Te proponemos que comiences por dibujar el EJE, la DIRECTRIZ y la TANGENTE en el vértice **V**. A continuación, traza la CURVA empleando el método de ***«Construcción por haces proyectivos»*** y señala sobre ella los puntos desde los que se vean los extremos del segmento $\overline{\textbf{VF}}$ bajo un ángulo de **30º**. Da respuesta gráfica a las dos posibles soluciones.

1 *CONSTRUCCIÓN DE LA PARÁBOLA POR PUNTOS*

DATO: **p** = $\overline{\textbf{FD}}$



2 *OBTENCIÓN DE ELEMENTOS DE LA CURVA*



3 *OBTENCIÓN DE ELEMENTOS DE LA CURVA*

LA PARÁBOLA: TRAZADO Y DETERMINACIÓN DE SUS PARÁMETROS

nombre y apellidos

nº | curso/grupo | fecha

1. Se conocen el eje, el foco **F** y el parámetro **p** = $\overline{\mathbf{FD}}$ de una PARÁBOLA. Dibuja, mediante la ***«Construcción por puntos»***, la CURVA, y sitúa por ENCIMA del EJE un punto **T** distante **28** mm. del foco. Asimismo, traza, por dicho punto, la RECTA TANGENTE a la CÓNICA.

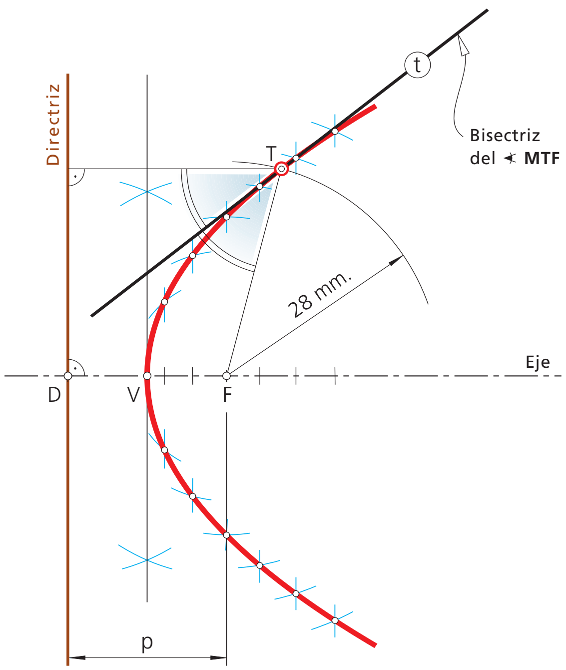
2. Determina el EJE, el VÉRTICE y la DIRECTRIZ de la PARÁBOLA definida por el foco **F** y un par de puntos **A** y **B** de la cónica. ¿Cuántas soluciones pueden darse? Da respuesta gráfica a cada una de ellas.

3. La situación de los puntos **F** (foco) y **V** (vértice) define la DISTANCIA RELATIVA necesaria para determinar una PARÁBOLA.

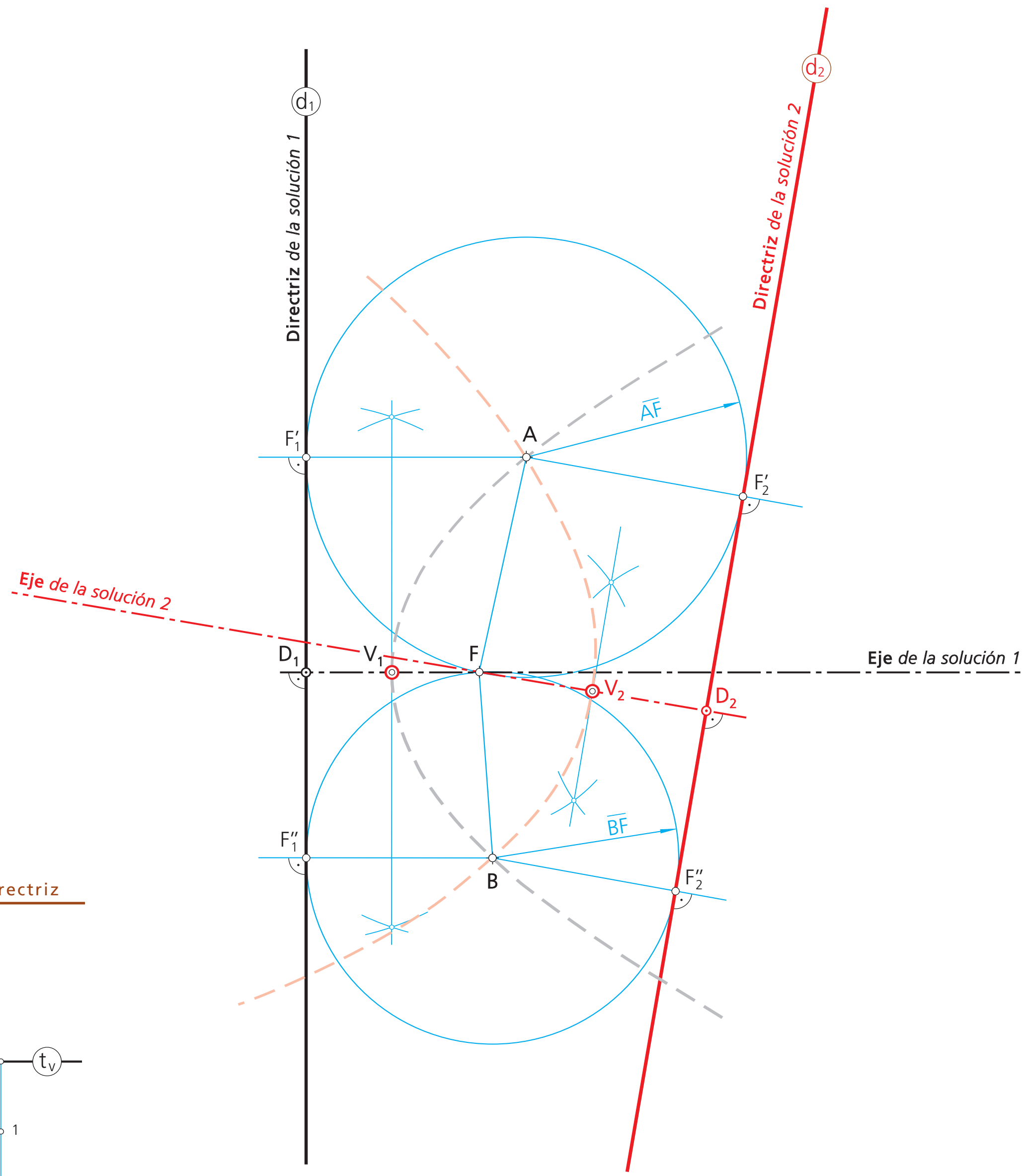
Te proponemos que comiences por dibujar el EJE, la DIRECTRIZ y la TANGENTE en el vértice **V**. A continuación, traza la CURVA empleando el método de ***«Construcción por haces proyectivos»*** y señala sobre ella los puntos desde los que se vean los extremos del segmento $\overline{\mathbf{VF}}$ bajo un ángulo de **30º**. Da respuesta gráfica a las dos posibles soluciones.

1 *CONSTRUCCIÓN DE LA PARÁBOLA POR PUNTOS*

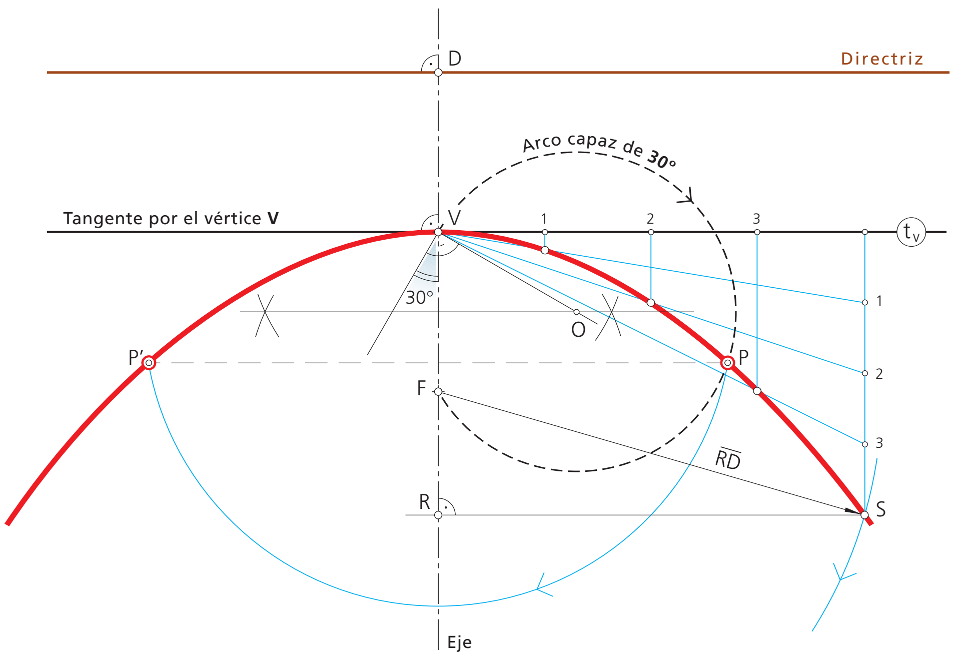
DATO: **p** = $\overline{\mathbf{FD}}$



2 *OBTENCIÓN DE ELEMENTOS DE LA CURVA*



3 *OBTENCIÓN DE ELEMENTOS DE LA CURVA*



COMENTARIO

Dado que los puntos de una parábola equidistan del foco (**F**) y de la directriz, se trazan dos circunferencias con centros en **A** y **B** y radios $\overline{\mathbf{AF}}$ y $\overline{\mathbf{BF}}$.

Las tangentes exteriores a las circunferencias anteriores determinan las directrices ($\mathbf{d_1}$) y ($\mathbf{d_2}$) de las dos parábolas solución.

Los ejes serán perpendiculares, por el foco **F**, a sus respectivas directrices y los vértices $\mathbf{V_1}$ y $\mathbf{V_2}$ estarán situados en el punto medio de los segmentos $\overline{\mathbf{FD_1}}$ y $\overline{\mathbf{FD_2}}$, respectivamente.