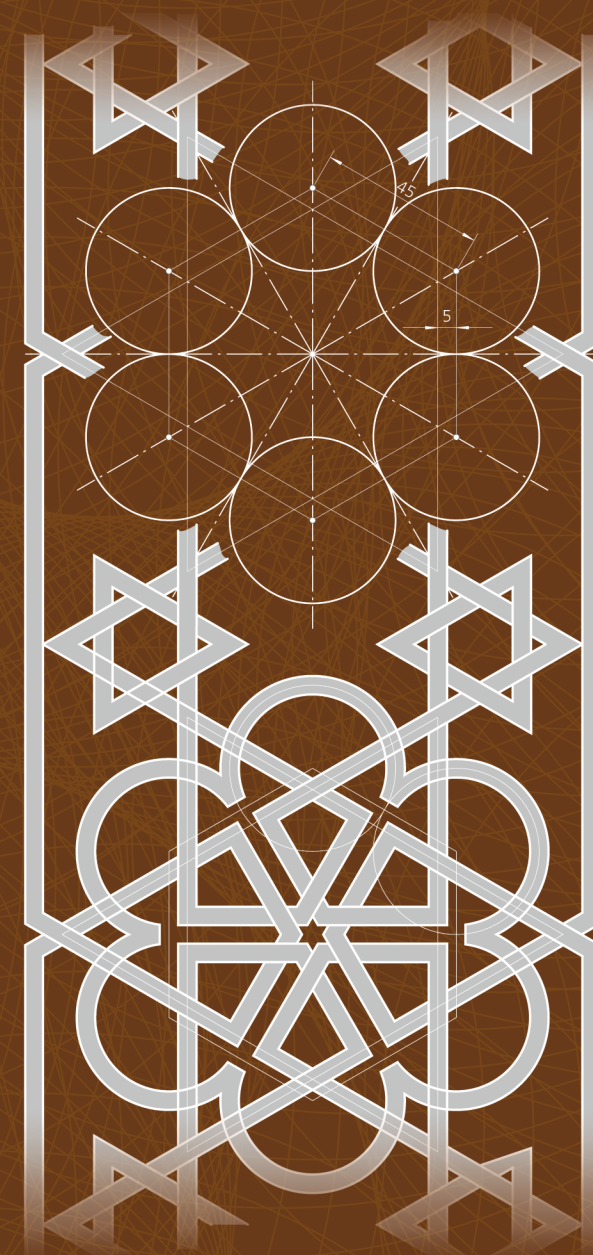


geometría métrica aplicada



**TANGENCIAS BÁSICAS
ENLACES**



TANGENCIAS BÁSICAS. ENLACES

OBJETIVOS

1 Entender que el enlace de líneas es un problema de tangencias y, por ello, basado en las propiedades en que se fundamentan.

2 Comprender cómo un correcto conocimiento de las situaciones de tangencias y de sus construcciones, resuelve el problema de enlace entre líneas.

3 Razonar que el centro de las circunferencias tangentes es un punto, lugar geométrico, equidistante de otras líneas (rectas y circunferencias).

1 FUNDAMENTOS

Las tangencias son trazados geométricos presentes en numerosos diseños, estructuras arquitectónicas e infinidad de formas decorativas y objetos de uso común.

Recordemos que dos líneas se dice que son tangentes cuando tienen un solo punto común sin cortarse. Para resolver cualquier problema de tangencias de rectas con circunferencias y de éstas entre sí, es necesario aplicar con todo rigor las propiedades y consideraciones geométricas que se indican a la derecha.

2 RECTAS TANGENTES A UNA CIRCUNFERENCIA

2.1 Por un punto T de la circunferencia.

- **Datos:** Circunferencia de centro O y punto T .
- **Paso 1.-** Se une O con T para definir el radio OT , alineando la escuadra según se indica.
- **Paso 2.-** Se gira la escuadra 90° y por el punto T se traza la perpendicular al radio, obteniendo la recta tangente solución.

2.2 Paralelas a una dirección d .

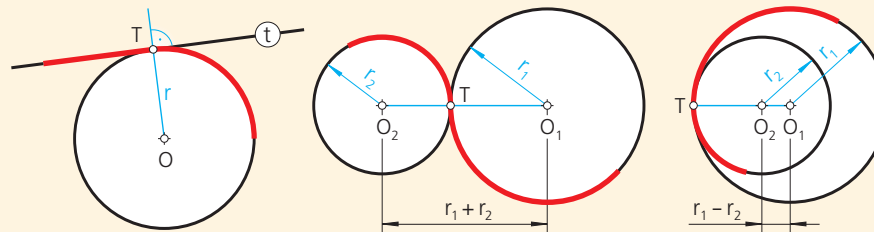
- **Datos:** Circunferencia de centro O y dirección según una recta d .
- **Paso 1.-** Se sitúa la escuadra y el cartabón, en su posición general como indica la figura, refiriendo la escuadra en la dirección d . Seguidamente, se gira la escuadra 90° y se desliza sobre el cartabón hasta alinear el centro O y trazar el diámetro de la circunferencia que, por intersección con ella, determina los puntos de tangencia T_1 y T_2 .
- **Paso 2.-** Las rectas paralelas a la dirección d que pasan por T_1 y T_2 resultan ser las rectas tangentes a la circunferencia.

2.3 Por un punto P exterior a la circunferencia.

- **Datos:** Circunferencia de centro O y punto exterior P .
- **Paso 1.-** Se traza la mediatriz del segmento \overline{PO} para obtener el punto M , centro de la circunferencia que pasa por los puntos P y O . Dicha circunferencia corta a la dada en los puntos T_1 y T_2 , que son los de tangencia de las rectas solución.
- **Paso 2.-** La unión de los puntos T_1 y T_2 con el punto exterior P define las dos rectas tangentes t_1 y t_2 que es posible trazar desde un punto exterior a una circunferencia.

Nótese que la circunferencia trazada en el paso anterior es arco capaz de 90° respecto al diámetro \overline{PO} ; por ello, los radios OT_1 y OT_2 son perpendiculares a las rectas tangentes t_1 y t_2 .

PROPIEDADES FUNDAMENTALES

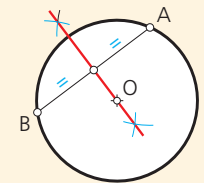


1ª «Si una recta es tangente a una circunferencia, el radio en el punto de tangencia es perpendicular a la recta».

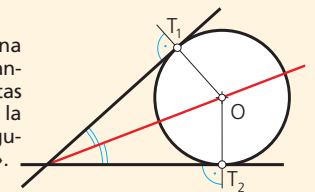
2ª «Si dos circunferencias son tangentes (exteriores o interiores), sus centros están alineados con el punto de tangencia y distan la suma o diferencia de sus respectivos radios».

CONSIDERACIONES GEOMÉTRICAS

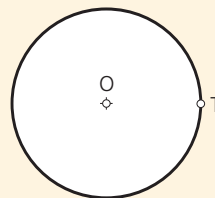
«El centro de una circunferencia que pasa por dos puntos A y B está en la mediatriz del segmento que los une».



«El centro de una circunferencia tangente a dos rectas se encuentra en la bisectriz del ángulo que forman».

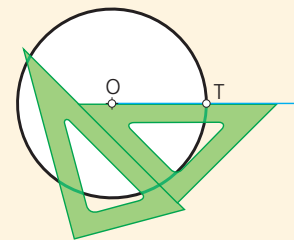


DATOS:

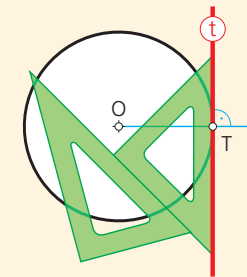


2.1 Recta tangente en un punto T de la circunferencia.

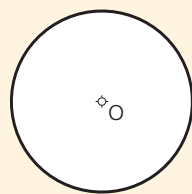
1



2

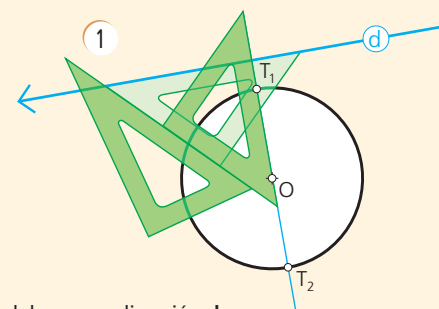


DATOS:

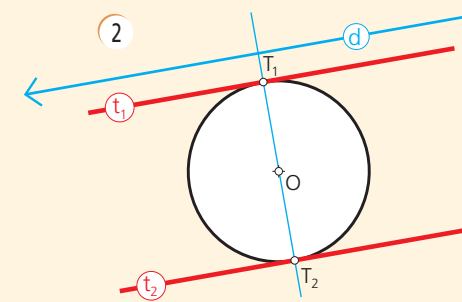


2.2 Rectas tangentes a una circunf. y paralelas a una dirección d .

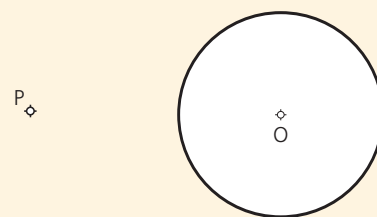
1



2

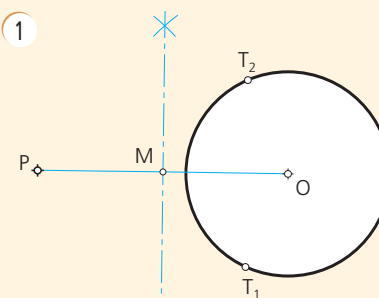


DATOS:

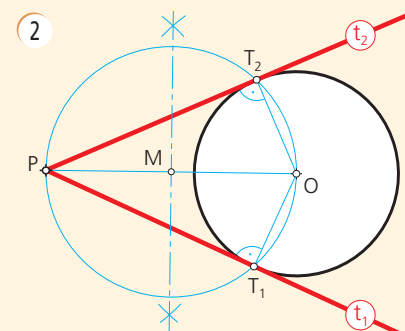


2.3 Rectas tangentes a una circunf. desde un punto exterior P .

1



2



3 RECTAS TANGENTES COMUNES A DOS CIRCUNFERENCIAS

3.1 Rectas tangentes exteriores.

- **Datos:** Circunferencias de centros O_1 y O_2 y radios r_1 y r_2 respectivamente.

- **Paso 1.-** Se comienza por aplicar el procedimiento de «dilatación-contracción» muy utilizado en la resolución de problemas de tangencias: se reduce la circunferencia de menor radio a su centro O_1 y, la de mayor radio, a una concéntrica de radio $r_2 - r_1$.

Seguidamente, desde O_1 se trazan las rectas tangentes a la circunferencia diferencia de radios, según se vio en el apartado 2.3, obteniendo los puntos de tangencia 1 y 2.

La prolongación de los radios $\overline{O_21}$ y $\overline{O_22}$ determinan los puntos T_1 y T_2 .

- **Paso 2.-** Las rectas t_1 y t_2 , tangentes solución, contactan en T_1 y T_2 y son paralelas a las tangentes antes obtenidas. Los puntos de contacto T_3 y T_4 son los pies de las perpendiculares trazadas por O_1 a dichas tangentes.

3.2 Rectas tangentes interiores.

- **Datos:** Circunferencias de centros O_1 y O_2 y radios r_1 y r_2 respectivamente.

- **Paso 1.-** Análogamente a lo realizado en la construcción anterior, se comienza por aplicar el procedimiento de «dilatación-contracción»: en este caso se reduce la circunferencia menor a su centro O_1 y, la mayor, a una concéntrica de radio $r_1 + r_2$.

A continuación, desde O_1 se trazan las tangentes a la circunferencia suma de radios ($r_1 + r_2$), obteniendo los puntos 1 y 2.

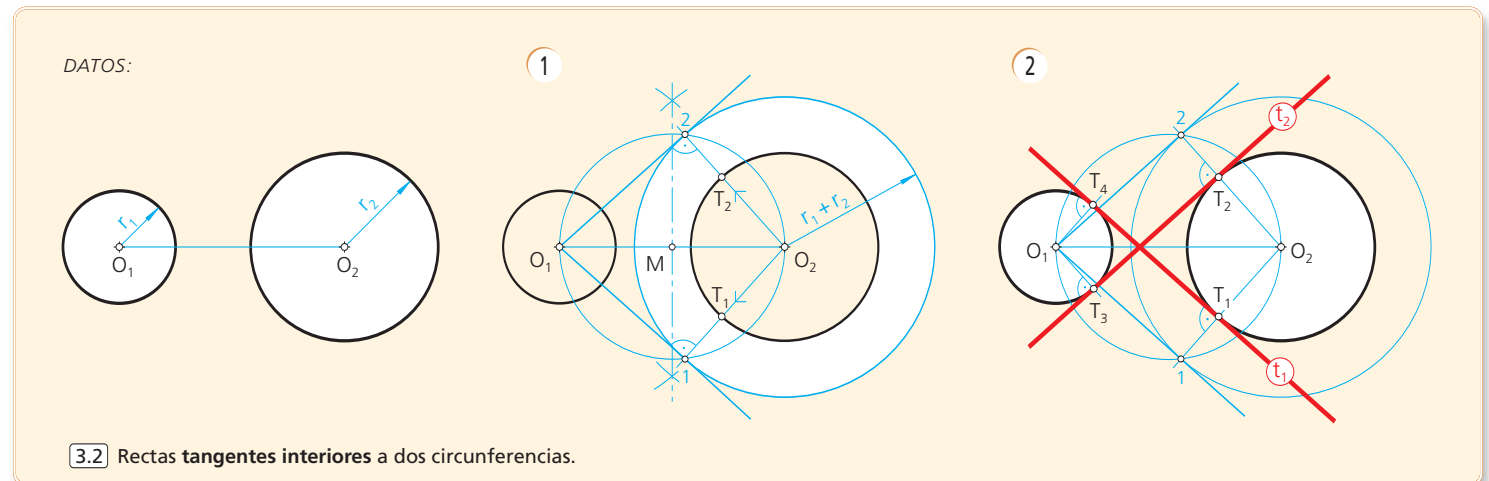
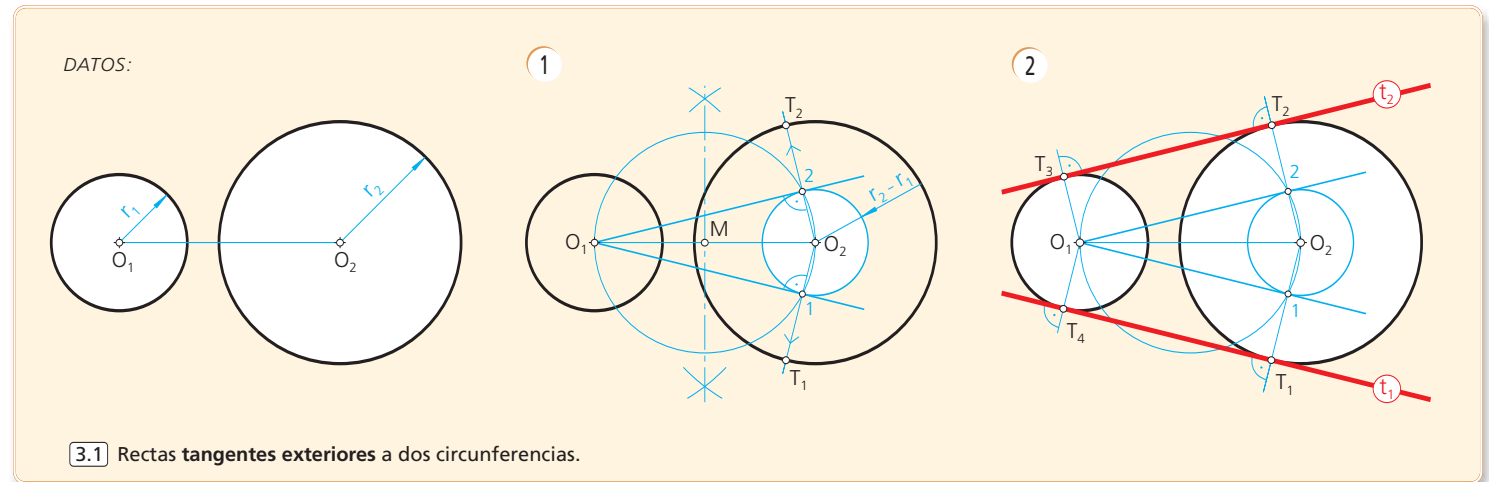
El trazado de los radios $\overline{O_21}$ y $\overline{O_22}$ determina los puntos de tangencia T_1 y T_2 .

- **Paso 2.-** Las rectas t_1 y t_2 , tangentes solución, contactan en T_1 y T_2 y son paralelas a las tangentes obtenidas anteriormente. Los puntos de contacto T_3 y T_4 son los pies de las perpendiculares trazadas por O_1 a las tangentes solución.

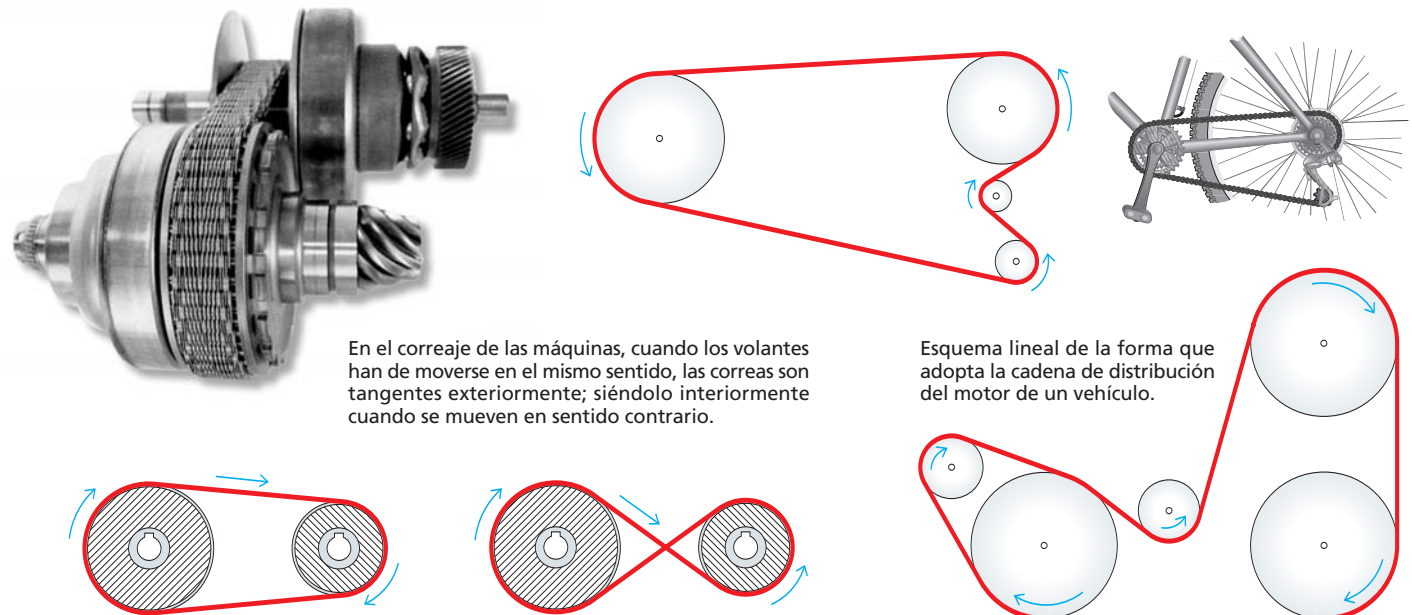
3.3 Aplicaciones en el diseño industrial.

En el campo de la industria y el diseño tecnológico de mecanismos es muy frecuente encontrarse con aplicaciones prácticas que se apoyan en el esquema lineal de rectas tangentes, exteriores o interiores, a dos circunferencias.

Es el caso de la forma que adopta la correa de transmisión de las máquinas, del motor de un vehículo de tracción mecánica o de la cadena de transmisión en una bicicleta.



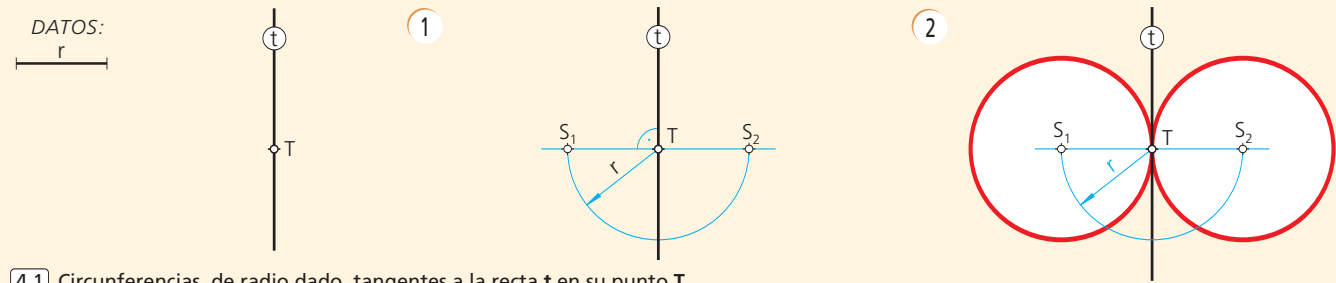
TANGENCIAS EN EL DISEÑO INDUSTRIAL



4 TRAZADO DE CIRCUNFERENCIAS TANGENTES DE RADIO CONOCIDO

4.1 Por un punto T de una recta t .

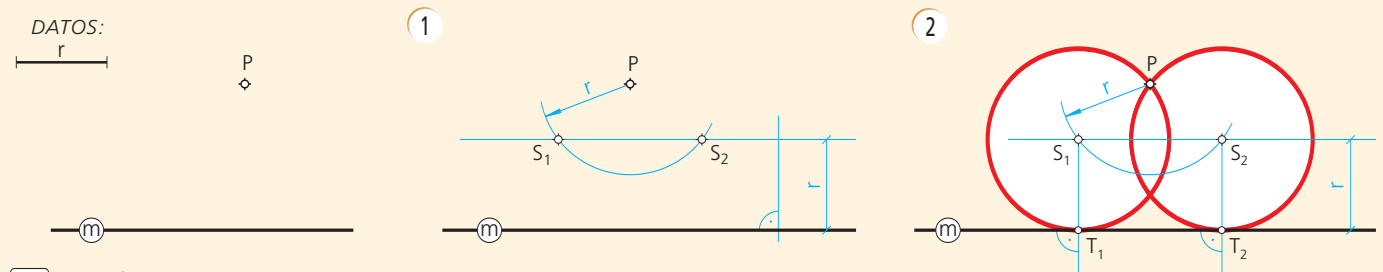
- **Datos:** Recta t y punto T de ella, así como la magnitud r del radio de las circunferencias solución.
- **Paso 1.-** Se traza la perpendicular a la recta t por el punto T y se lleva el radio r en los dos sentidos, obteniendo así los puntos S_1 y S_2 , centros de las dos posibles soluciones.
- **Paso 2.-** Con centro en S_1 y S_2 y radio r se obtienen las dos circunferencias tangentes a la recta t en el punto T .



4.1 Circunferencias, de radio dado, tangentes a la recta t en su punto T .

4.2 A una recta m pasando por un punto exterior P .

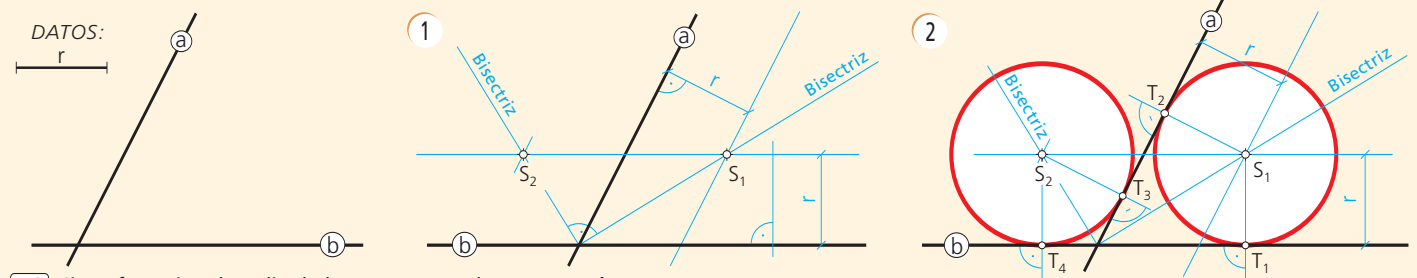
- **Datos:** Recta m , punto P y radio r .
- **Paso 1.-** Dado que la circunferencia solución ha de pasar por P y ser tangente a la recta m , su centro equidistará (l.g.) de ambos elementos. Por ello, y para su localización, se traza la paralela a m distante la magnitud r , y con centro en P un arco de radio r ; los puntos de intersección S_1 y S_2 son los centros de las circunferencias solución.
- **Paso 2.-** Se trazan las dos circunferencias y se definen los puntos de tangencia T_1 y T_2 con la recta.



4.2 Circunferencias, de radio dado, tangentes a la recta m pasando por un punto exterior P .

4.3 A dos rectas a y b que se cortan.

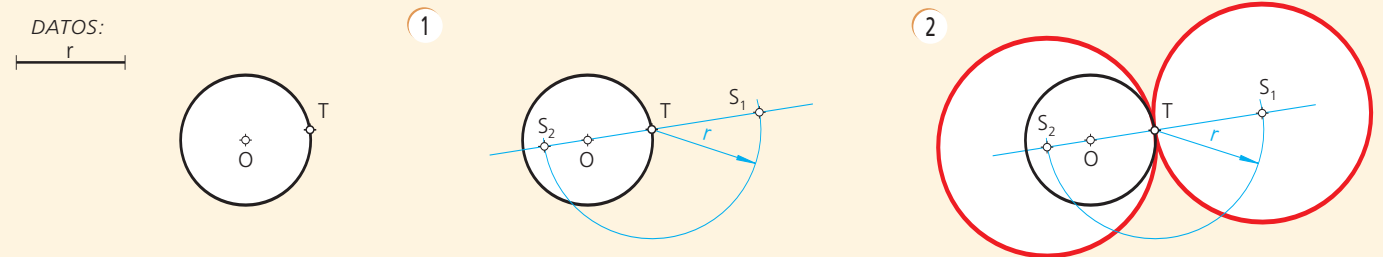
- **Datos:** Rectas a y b . Radio r de las circunferencias solución.
- **Paso 1.-** Recordando la segunda consideración geométrica anunciada al comienzo de la *Unidad Didáctica*, el centro de las circunferencias tangentes (siempre son posible cuatro soluciones) se encuentran en las bisectrices de los ángulos que forman las rectas a y b dadas. Asimismo, los centros distarán una magnitud r de cada recta. Los puntos comunes a ambos lugares geométricos determinan los centros S_1 y S_2 .
- **Paso 2.-** Se han dibujado únicamente dos soluciones. Las otras dos son las simétricas respecto al ángulo del vértice que forman las rectas a y b . Los puntos T_1 , T_2 , T_3 y T_4 son los de tangencia de las correspondientes soluciones.



4.3 Circunferencias, de radio dado, tangentes a dos rectas a y b que se cortan.

4.4 A una circunferencia de centro O por un punto T de ella.

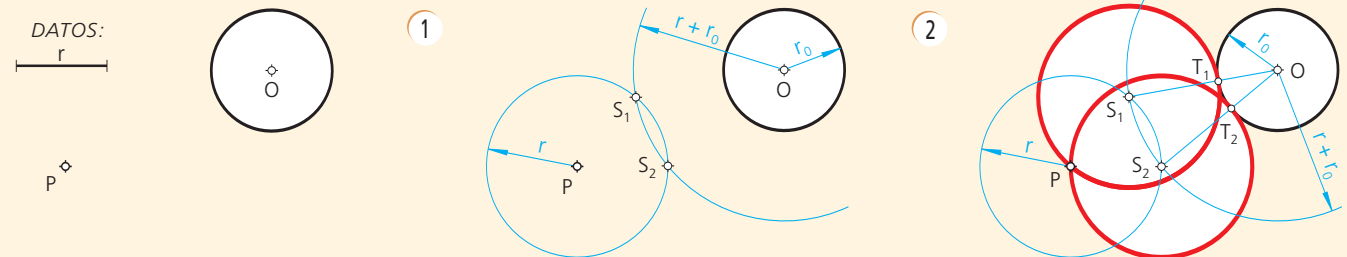
- **Datos:** Circunferencia de centro O , punto T de ella y radio r de las circunferencias solución.
- **Paso 1.-** Los centros de las circunferencias tangentes en el punto T estarán en la recta OT y a una distancia r de dicho punto.
- **Paso 2.-** Con centro S_1 y S_2 se dibujan las dos circunferencias solución.



4.4 Circunferencias, de radio dado, tangentes a una circunferencia de centro O por un punto T de ella.

4.5 A una circunferencia de centro O y que pasen por un punto exterior P .

- **Datos:** Circunferencia de centro O , punto P y radio r de las circunferencias tangentes pedidas.
- **Paso 1.-** Los centros de las circunferencias solución, son puntos que han de equidistar (lugares geométricos) de la circunferencia dada y del punto P . Por ello, se encontrarán en la intersección de la circunferencia de radio r y centro P con la de centro O y radio $r + r_0$.
- **Paso 2.-** Con centro S_1 y S_2 se dibujan las dos circunferencias solución.



4.5 Circunferencias, de radio dado, tangentes a una circunferencia de centro O y que pasen por un punto exterior P .

4.6 A dos circunferencias de centros O_1 y O_2 .

- **Datos:** Circunferencias de centros O_1 y O_2 y radios r_1 y r_2 respectivamente. Radio de las circunferencias solución: r .

- **Consideración previa:** Las circunferencias concéntricas con las dadas, de radios el suyo más, o menos, el de las soluciones, (r) también dado, se interseccionan en una serie de puntos ($S_1, S'_1, S_2, S'_2, S_3, S'_3, \dots$) que corresponden con los centros de las soluciones: ocho como máximo. El número de estas disminuirá en una, cuando dos de las circunferencias antes indicadas, resulten tangentes en vez de secantes; disminuirán en dos cuando sean exteriores, y así sucesivamente hasta el caso límite de cero soluciones que se presenta cuando las parejas de circunferencias auxiliares concéntricas no se corten entre sí.

En realidad, la solución es el resultado de las intersecciones sucesivas de dos lugares geométricos que cumplen parcialmente cada uno de ellos con una o algunas de las condiciones del problema.

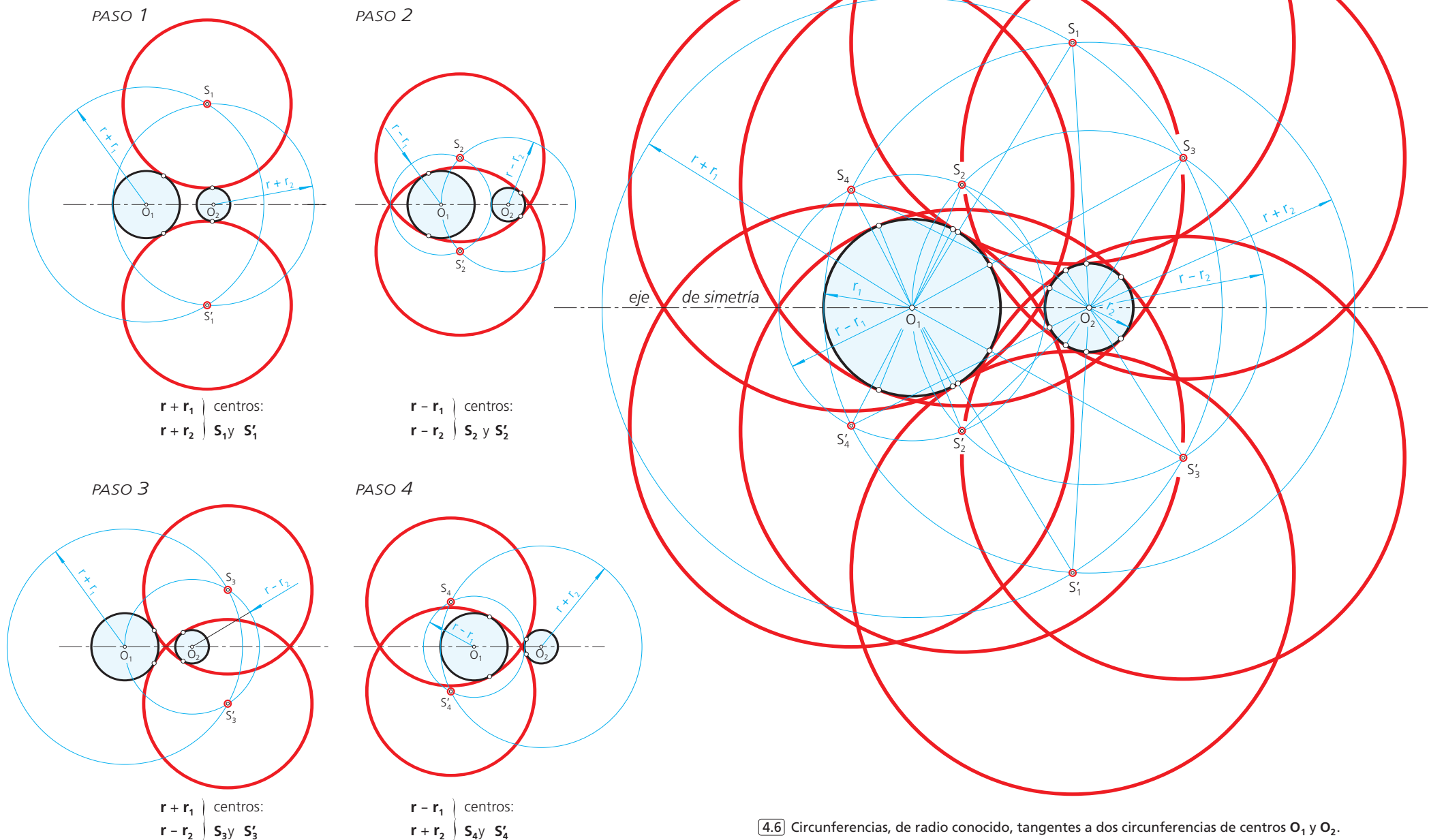
- **Paso 1.-** Se dibujan las circunferencias auxiliares de radios $(r + r_1)$ y $(r + r_2)$ con centros O_1 y O_2 respectivamente. Su intersección determina los puntos S_1 y S'_1 , simétricos respecto a la recta O_1O_2 , y centros de dos de las soluciones.

- **Paso 2.-** Análogamente, el trazado de las circunferencias auxiliares de radios $(r - r_1)$ y $(r - r_2)$ define la obtención de los centros S_2 y S'_2 de otras dos soluciones.

- **Paso 3.-** Siguiendo el mismo procedimiento, la intersección de las circunferencias auxiliares de radios $(r + r_1)$ y $(r - r_2)$ definen S_3 y S'_3 .

- **Paso 4.-** Por último, la intersección de las circunferencias auxiliares de radios $(r - r_1)$ y $(r + r_2)$ determinan los centros S_4 y S'_4 de las dos últimas soluciones que, como máximo, pueden darse en este problema.

El dibujo inferior presenta la integración de las ocho soluciones posibles con los puntos de tangencia correspondientes. Nótese la simetría de las circunferencias solución respecto al eje que une los centros O_1O_2 de las circunferencias datos.

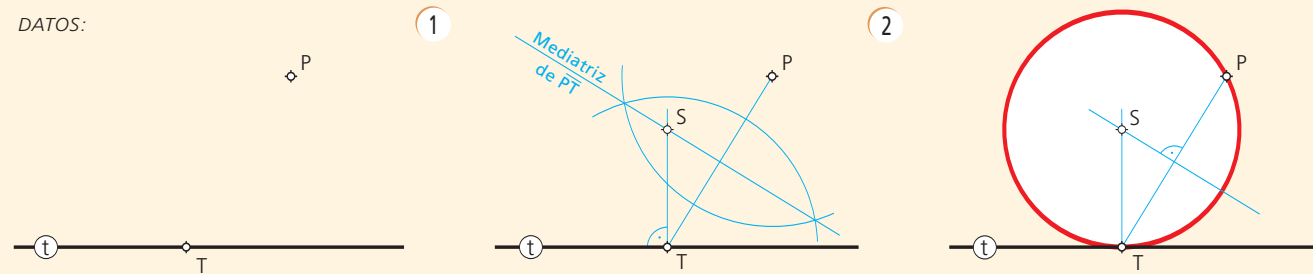


5 TRAZADO DE CIRCUNFERENCIAS TANGENTES DE RADIO DESCONOCIDO

5.1 A una recta t en un punto T de ella y que pasa por otro exterior P .

- **Datos:** Recta t y puntos T en la recta y P exterior a ella.
- **Paso 1.-** El problema sólo admite una solución, la circunferencia que tiene como centro el de la intersección de la perpendicular por T y la mediatriz del segmento \overline{PT} .
- **Paso 2.-** El radio de la circunferencia solución es la que se obtiene con centro en S y radio \overline{ST} , como indica la figura.

DATOS:

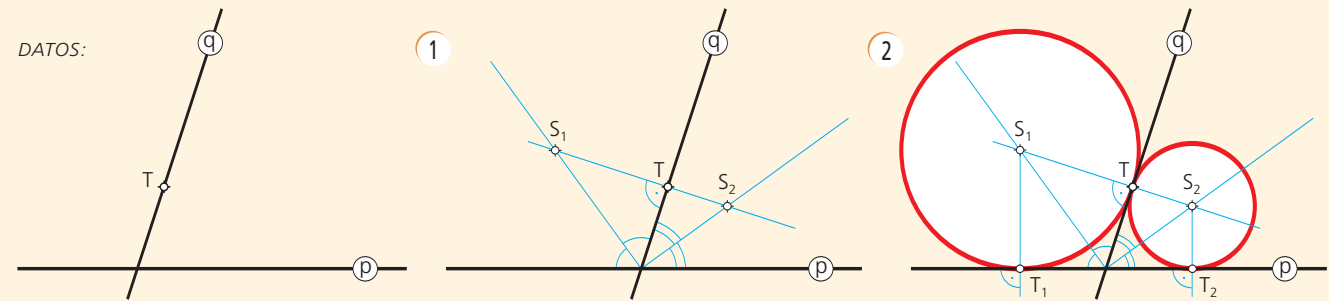


5.1 Circunferencia, de radio desconocido, tangente a una recta t en un punto T de ella y que pasa por otro punto exterior P .

5.2 A dos rectas y que pasen por un punto T .

- **Datos:** Rectas p y q y punto T sobre ellas.
- **Paso 1.-** El problema admite dos soluciones. Los centros de ambas (S_1 y S_2) serán los puntos comunes de la perpendicular trazada por T a la recta q con las bisectrices de los ángulos que forman p y q .
- **Paso 2.-** Como siempre, los puntos de tangencia T_1 y T_2 de cada solución con la recta p se obtienen trazando perpendiculares por los centros S_1 y S_2 de ambas soluciones.

DATOS:

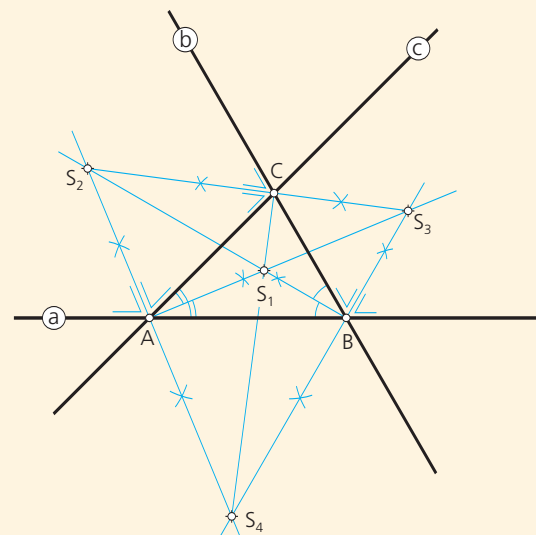


5.2 Circunferencias, de radios desconocidos, tangentes a dos rectas y que pasen por un punto T .

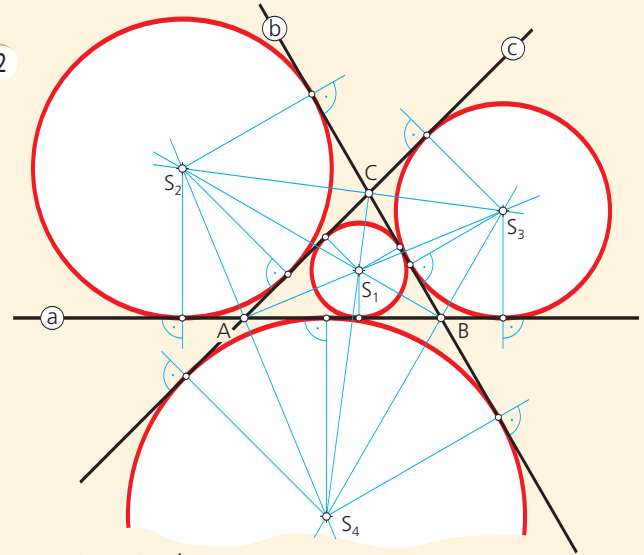
5.3 A tres rectas que se cortan entre sí.

- **Datos:** Rectas a , b y c .
- **Pasos 1.-** Las rectas conforman el triángulo ABC , de vértices la intersección de las rectas dadas. El punto de corte de las bisectrices de los ángulos interiores del triángulo determinan el incentro (S_1), centro de la circunferencia inscrita y primera de las soluciones. Análogamente, los puntos de corte de las bisectrices correspondientes a los ángulos exteriores definen los centros (S_2 , S_3 y S_4) de las otras tres circunferencias exteriores al triángulo ABC .
- **Paso 2.-** El radio de cada solución, como siempre, viene dado por la distancia del centro a cualquiera de las rectas. En la figura, se han señalado los puntos de tangencia de las soluciones con cada una de las rectas.

1



2

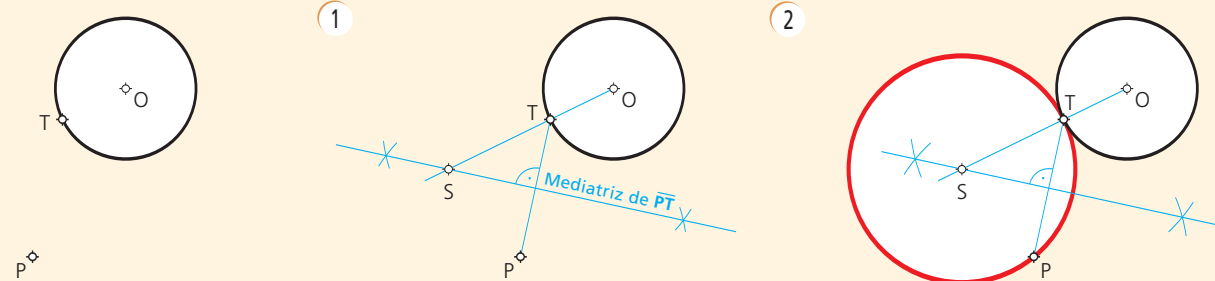


5.3 Circunferencias, de radios desconocidos, tangentes a tres rectas que se cortan entre sí.

5.4 A una circunferencia de centro O en un punto T de ella y que pase por otro exterior P .

- **Datos:** Circunferencia de centro O y puntos T y P .
- **Paso 1.-** El problema queda resuelto al determinar la intersección de la recta \overline{OT} (unión del centro de la circunferencia dada con el punto T de la tangencia) con la mediatriz del segmento \overline{TP} , lo que determina el punto S centro de la circunferencia solución.
- **Paso 2.-** Con centro en S y radio \overline{ST} queda dibujada la única solución que es posible construir.

DATOS:



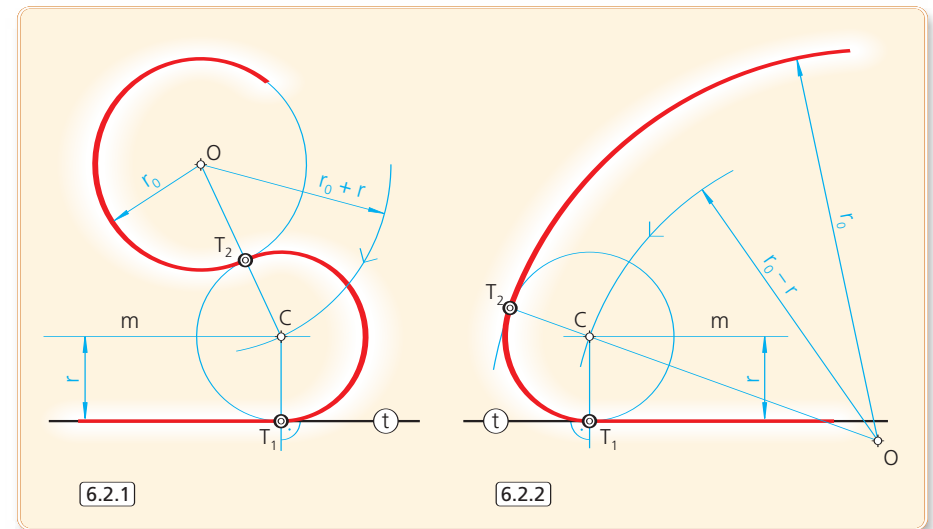
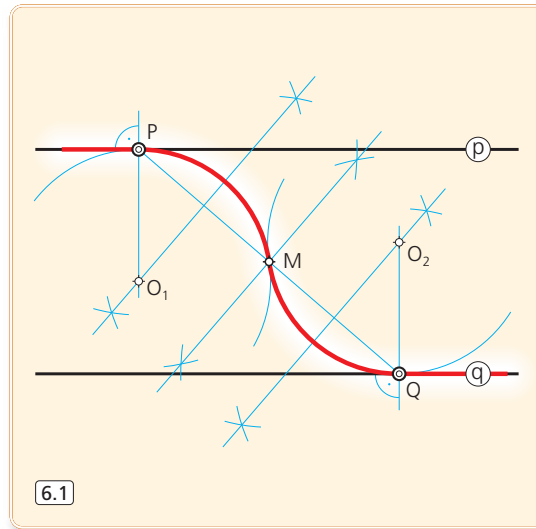
5.4 Circunferencia, de radio desconocido, tangente a una circunferencia de centro O en un punto T de ellas y que pase por otro exterior P .

6 ENLACES

Se llama *enlace o empalme*, en los trazados geométricos, a la unión de rectas con curvas o de curvas entre sí, efectuadas por medio de su punto de tangencia. Este punto común es el que permite la transición suave de unas a otras sin brusquedades de ningún tipo.

6.1 Enlazar dos rectas paralelas p y q mediante dos arcos iguales, conociendo los puntos de tangencia P y Q sobre ellas.

- Al ser los arcos iguales, el enlace se producirá en el punto medio M del segmento PQ .
- Los centros de los arcos se encontrarán en la intersección de las perpendiculares a las rectas p y q por los puntos de tangencia P y Q , con las mediatrices de los segmentos PM y MQ respectivamente.



6.2 Enlazar una recta t y un arco de circunferencia de centro O y radio r_0 por medio de un arco de circunferencia de radio r .

Pueden darse dos casos: bien que la circunferencia solución sea tangente exterior (fig. 6.2.1) o bien que sea interior a la circunferencia dada (fig. 6.2.2).

En ambos casos se trazan la recta m , paralela a t , distante r , y las circunferencias de radio $(r_0 + r)$ o $(r_0 - r)$, respectivamente, que determinan el punto de intersección C , centro del arco de enlace en ambos casos.

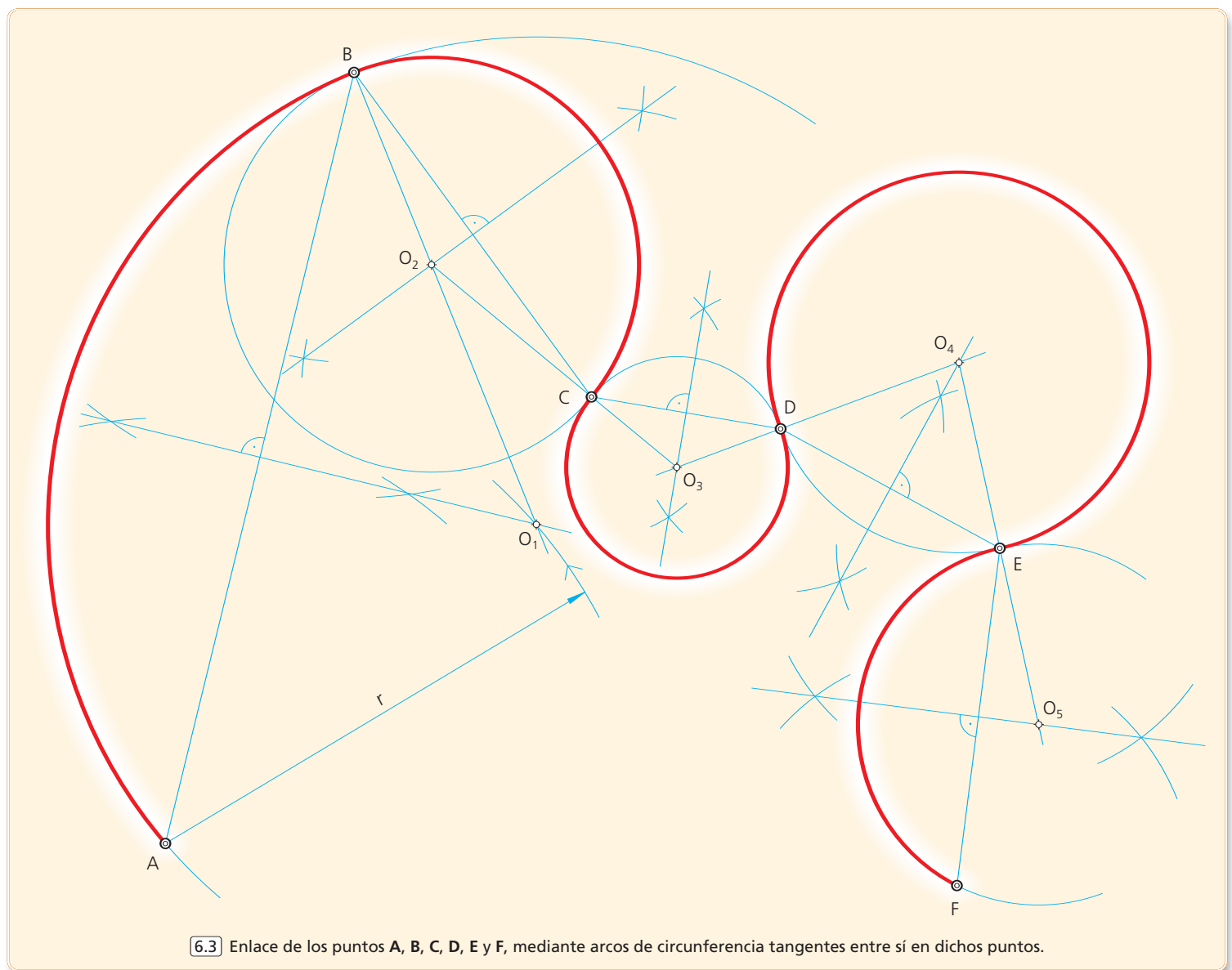
6.3 Enlazar varios puntos A, B, C, \dots no alineados, mediante arcos de circunferencia, conociendo el radio r de uno de los arcos.

Se trata de ir uniendo los puntos de una poligonal ($A-B-C-D-E-F$), con arcos de circunferencia tangentes entre sí.

Para ello, se ha de tener en cuenta que los centros de las circunferencias están en la mediatriz de cada segmento, y también que, para que la curva sea tangente a la anterior, ha de estar en la recta que une los centros de ambas. El punto de intersección de las rectas –mediatriz y línea de centros– determina el centro del arco de circunferencia que pasa por los dos puntos considerados.

El procedimiento de construcción es como sigue, según se indica en la fig. 6.3:

- Se comienza trazando la mediatriz del segmento AB y, con centro en A y radio r (dado), se traza un arco que corta a la mediatriz en el punto O_1 , centro del arco que pasa por dichos puntos.
- Se unen los puntos B y C , trazando la mediatriz del segmento que corta a la recta O_1B en el punto O_2 . Con este centro se traza el arco BC , que es tangente al anterior en B .
- Se unen los puntos C y D trazando la mediatriz del segmento, que corta a la recta O_2C en el punto O_3 . Con centro en O_3 se traza el arco CD , tangente al anterior en C y así sucesivamente.



6.3 Enlace de los puntos A, B, C, D, E y F , mediante arcos de circunferencia tangentes entre sí en dichos puntos.

TRÉBOL DE INTERCAMBIO DE CARRETERAS

Empleando el concepto de ENLACE ENTRE RECTA y CIRCUNFERENCIA o viceversa (primera propiedad de tangencias), se pide:

Dibujar, a escala 1/2.000, el TRÉBOL o NUDO DE CARRETERAS que se indica en el ESQUEMA acotado y cuyo proyecto final se materializó en la obra civil que muestra la fotografía.

Nótese cómo dicho nudo de comunicaciones es SIMÉTRICO respecto a dos EJES PERPENDICULARES, que contienen a los centros de los arcos de circunferencia en los bucles correspondientes.

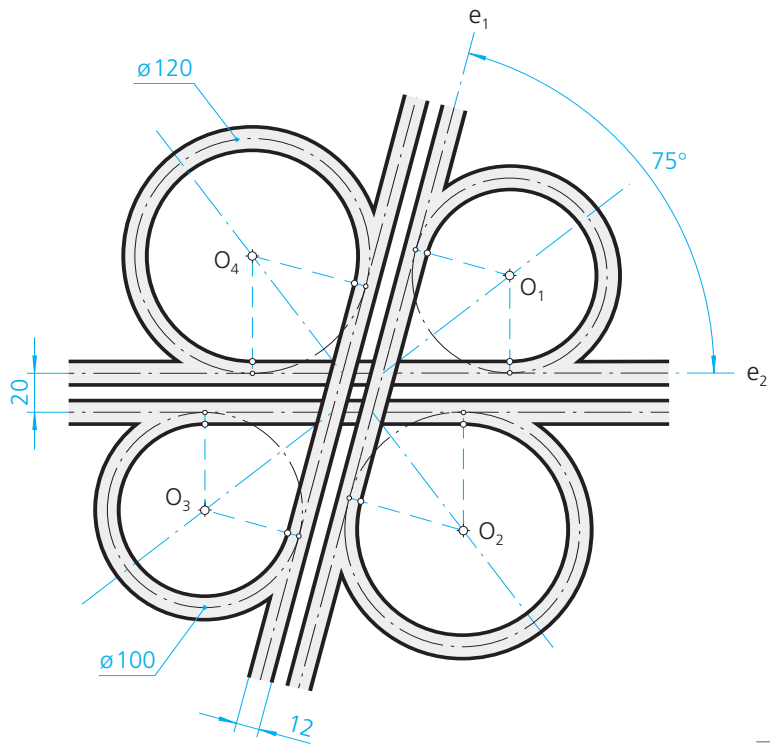
ANCHURA DE LA VÍA: 12 metros.

nombre y apellidos

nº

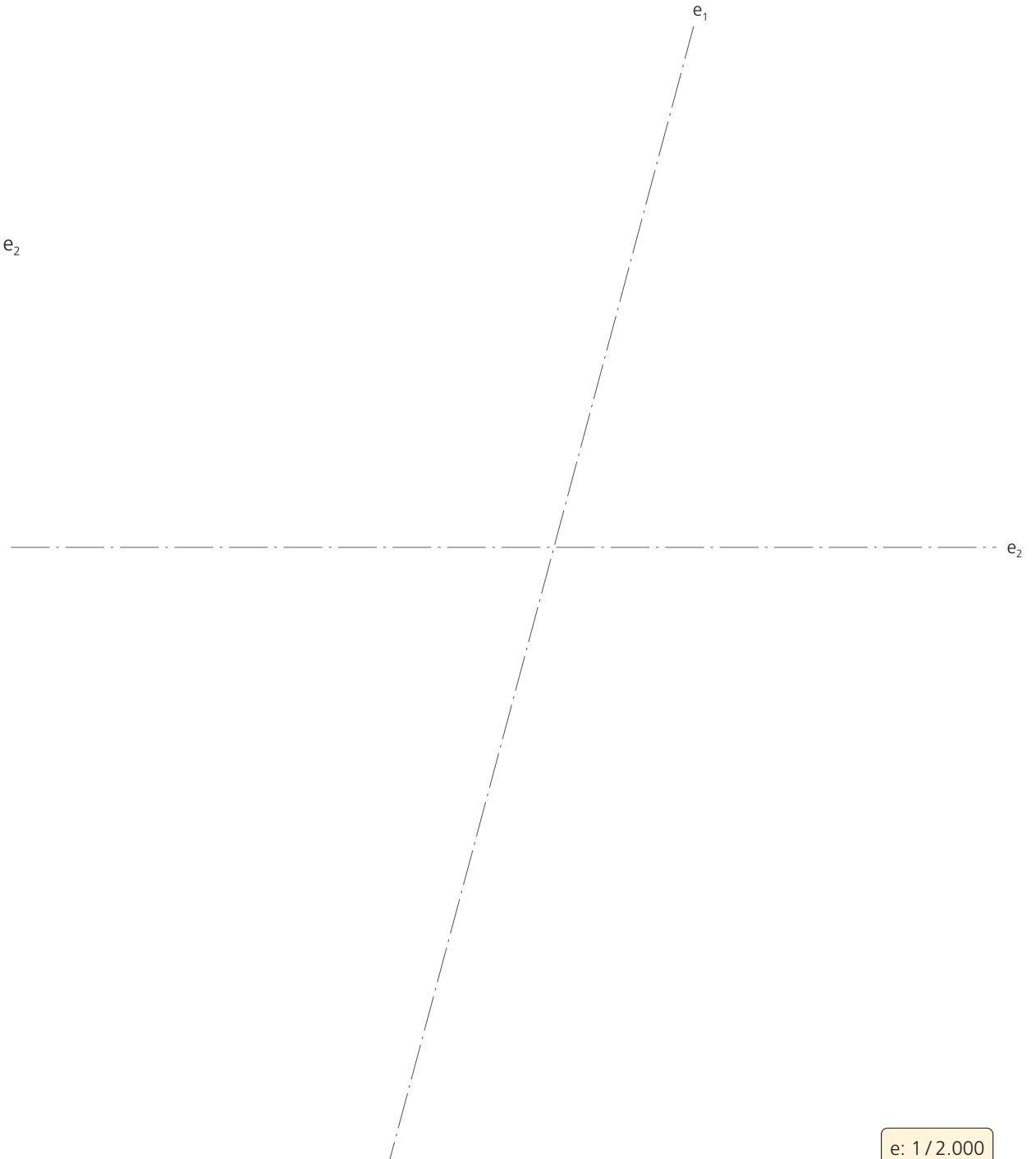
curso/grupo

fecha



ESQUEMA (cotas en metros)

TRÉBOL DE CARRETERAS



TRÉBOL DE INTERCAMBIO DE CARRETERAS

Empleando el concepto de ENLACE ENTRE RECTA y CIRCUNFERENCIA o viceversa (primera propiedad de tangencias), se pide:

Dibujar, a escala 1/2.000, el TRÉBOL o NUDO DE CARRETERAS que se indica en el ESQUEMA acotado y cuyo proyecto final se materializó en la obra civil que muestra la fotografía.

Nótese cómo dicho nudo de comunicaciones es SIMÉTRICO respecto a dos EJES PERPENDICULARES, que contienen a los centros de los arcos de circunferencia en los bucles correspondientes.

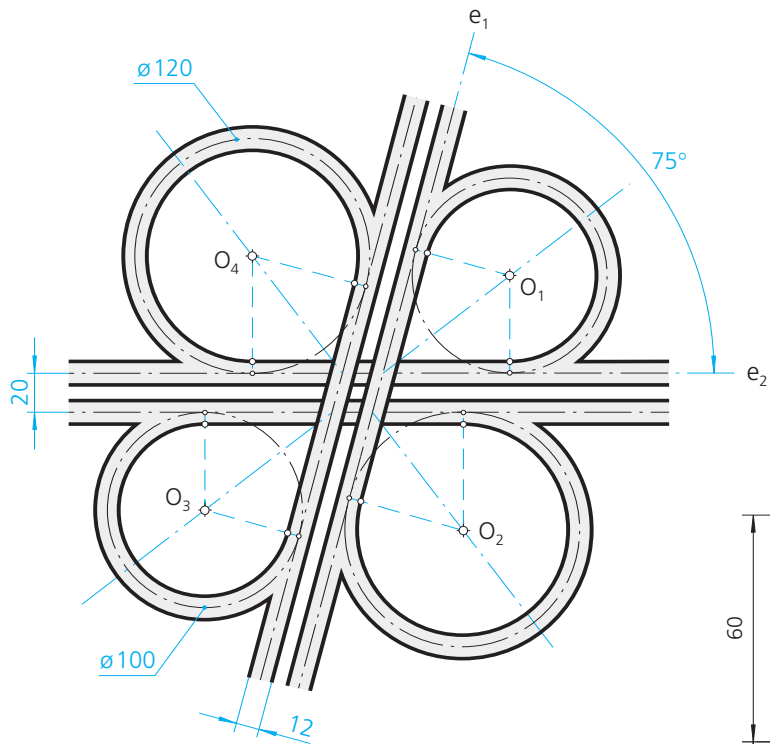
ANCHURA DE LA VÍA: 12 metros.

nombre y apellidos

nº

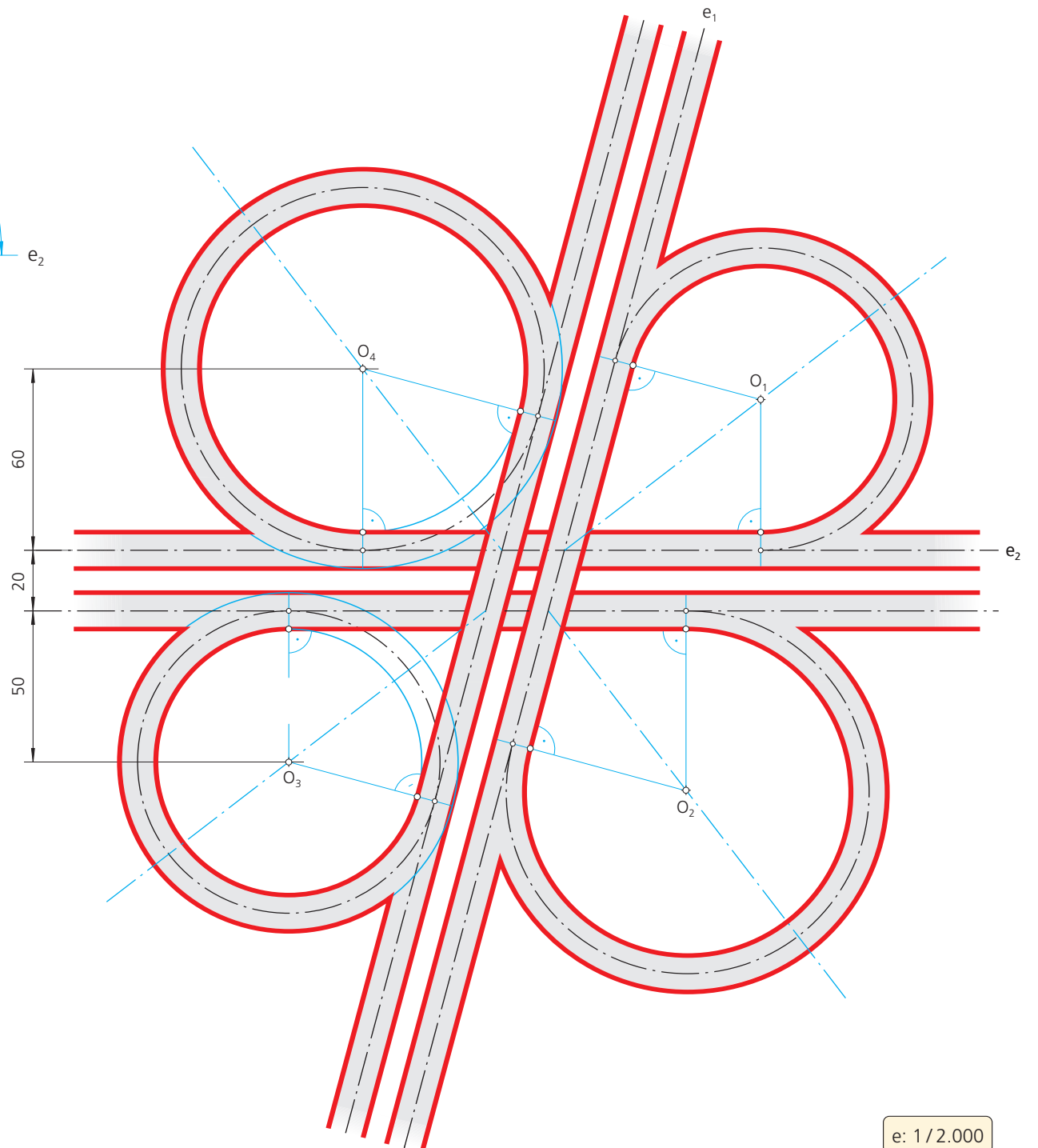
curso/grupo

fecha



ESQUEMA (cotas en metros)

TRÉBOL DE CARRETERAS

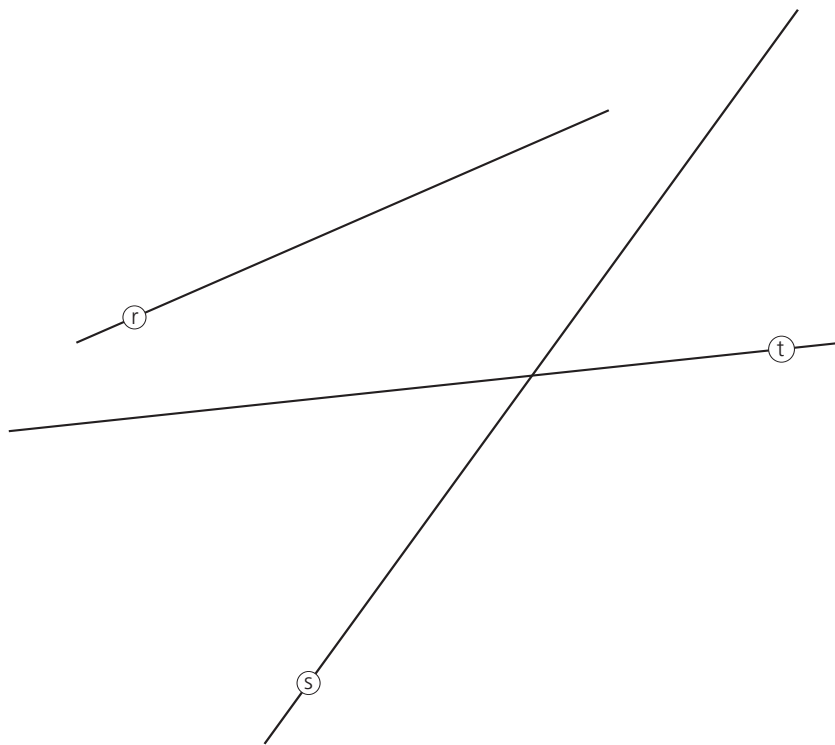


e: 1/2.000

VERIFICACIONES

1. ¿Qué dice la **PRIMERA PROPIEDAD FUNDAMENTAL** de **TANGENCIAS**?
Enunciar y dibujar un **ESQUEMA** que ayude a su comprensión.

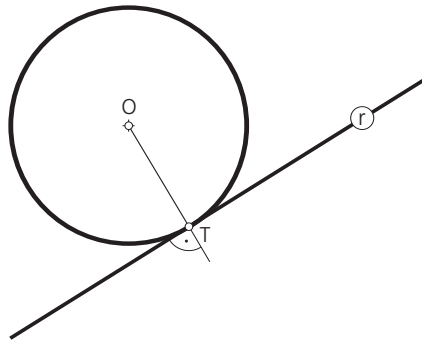
2. Dibujar la **CIRCUNFERENCIA TANGENTE** a las rectas **r** y **s**, con centro en la recta **t**.
No olvidar señalar, con toda precisión, los **PUNTOS DE TANGENCIA** de las rectas con la circunferencia solución.



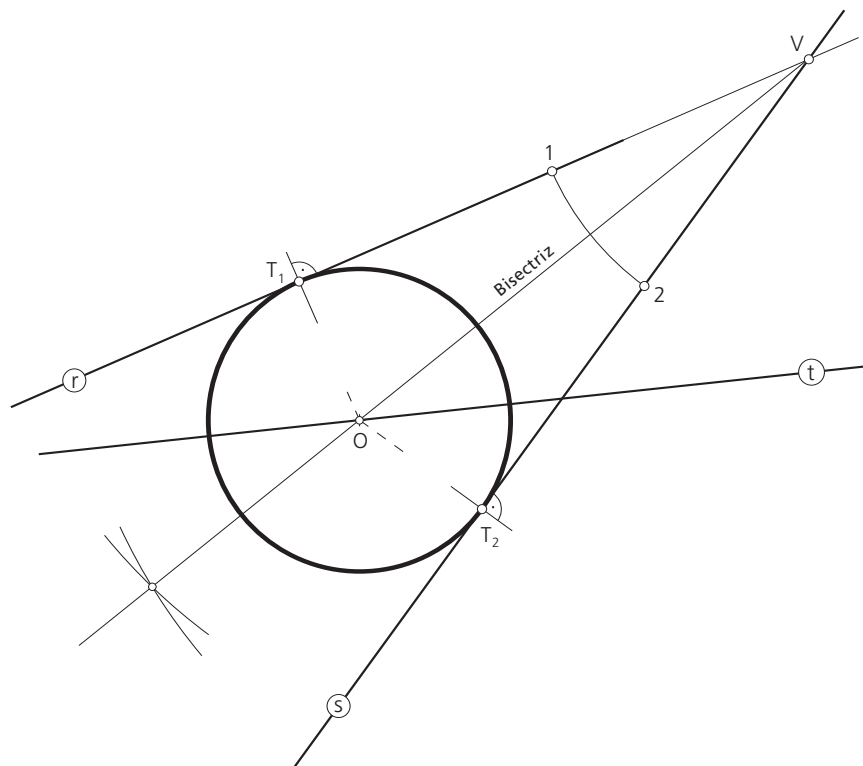
VERIFICACIONES

1. ¿Qué dice la **PRIMERA PROPIEDAD FUNDAMENTAL** de **TANGENCIAS**?
Enunciar y dibujar un **ESQUEMA** que ayude a su comprensión.

«Si una recta es tangente a una circunferencia, el radio en el punto de tangencia (**T**) es perpendicular a la recta».



2. Dibujar la **CIRCUNFERENCIA TANGENTE** a las rectas **r** y **s**, con centro en la recta **t**.
No olvidar señalar, con toda precisión, los **PUNTOS DE TANGENCIA** de las rectas con la circunferencia solución.



CONSTRUCCIÓN

- La bisectriz del ángulo que forman las rectas **r** y **s** determina, por intersección con la recta **t**, el centro **O** de la circunferencia tangente a las rectas dadas **r** y **s**.
- El radio de dicha circunferencia, así como los puntos de tangencia **T₁** y **T₂** con las rectas, quedan definidos al trazar desde **O** las perpendiculares correspondientes a las rectas **r** y **s** respectivamente.

CIRCUNFERENCIAS TANGENTES A RECTAS Y A OTRAS CIRCUNFERENCIAS

Empleando el concepto de trazado de **RECTAS TANGENTES EXTERIORES e INTERIORES a DOS CIRCUNFERENCIAS** y el de **CIRCUNFERENCIAS TANGENTES EXTERIORES**, se pide:

1. Dibuja un **CIRCUITO DE PRUEBAS**, del que se presenta el esquema del **EJE o MEDIANA** de la pista de asfalto. El circuito está planteado mediante **ENLACES** de rectas y arcos de circunferencia tangentes.

Representa el trazado del circuito, a escala **1/2.000**, dejando visibles todas las construcciones auxiliares y los puntos exactos de enlace.

2. Representa, a escala **1/1**, el **COMPÁS DE ESPESORES** representado en el dibujo adjunto, dejando constancia, en trazo continuo y fino, de todas las operaciones geométricas empleadas y marcando los puntos exactos de enlace entre circunferencias y rectas.

nombre y apellidos

nº

curso/grupo

fecha

1 CIRCUITO DE PRUEBAS

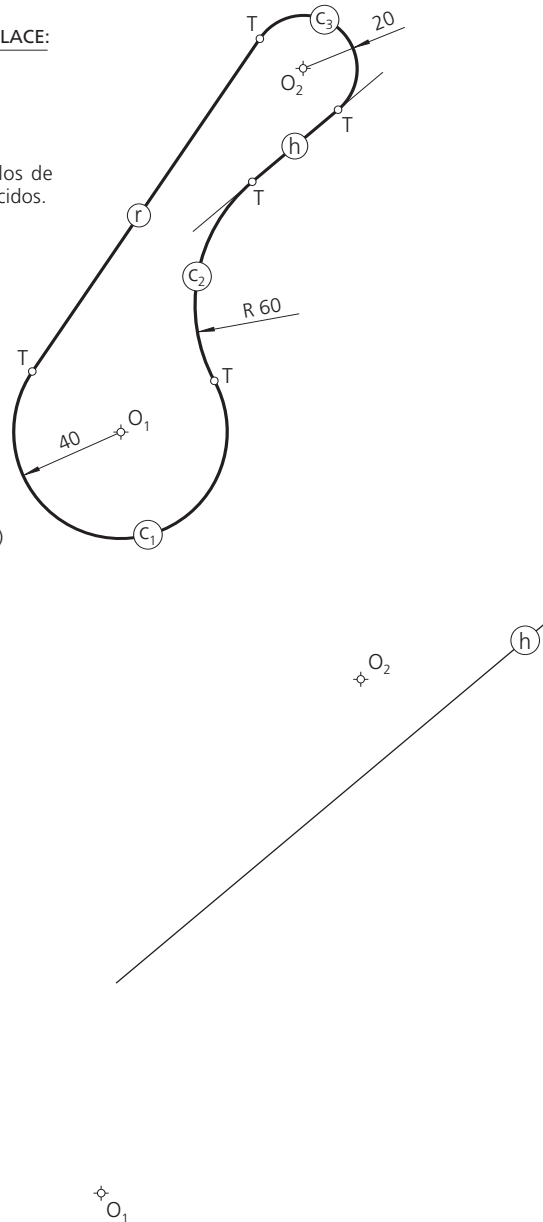
ELEMENTOS DE ENLACE:

c_1 , c_2 , h , c_3 y r .

CONSIDERACIÓN:

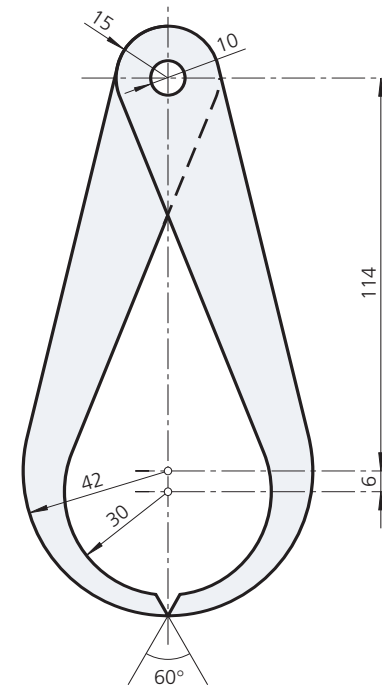
Los puntos **T** son los de tangencia desconocidos.

ESQUEMA
(Cotas en metros)



e: 1 / 2.000

2 COMPÁS DE ESPESORES



e: 1 / 1



CIRCUNFERENCIAS TANGENTES A RECTAS Y A OTRAS CIRCUNFERENCIAS

Empleando el concepto de trazado de **RECTAS TANGENTES EXTERIORES e INTERIORES a DOS CIRCUNFERENCIAS** y el de **CIRCUNFERENCIAS TANGENTES EXTERIORES**, se pide:

1. Dibuja un **CIRCUITO DE PRUEBAS**, del que se presenta el esquema del **EJE o MEDIANA** de la pista de asfalto. El circuito está planteado mediante **ENLACES** de rectas y arcos de circunferencia tangentes.

Representa el trazado del circuito, a escala **1/2.000**, dejando visibles todas las construcciones auxiliares y los puntos exactos de enlace.

2. Representa, a escala **1/1**, el **COMPÁS DE ESPESORES** representado en el dibujo adjunto, dejando constancia, en trazo continuo y fino, de todas las operaciones geométricas empleadas y marcando los puntos exactos de enlace entre circunferencias y rectas.

nombre y apellidos

nº

curso/grupo

fecha

1 CIRCUITO DE PRUEBAS

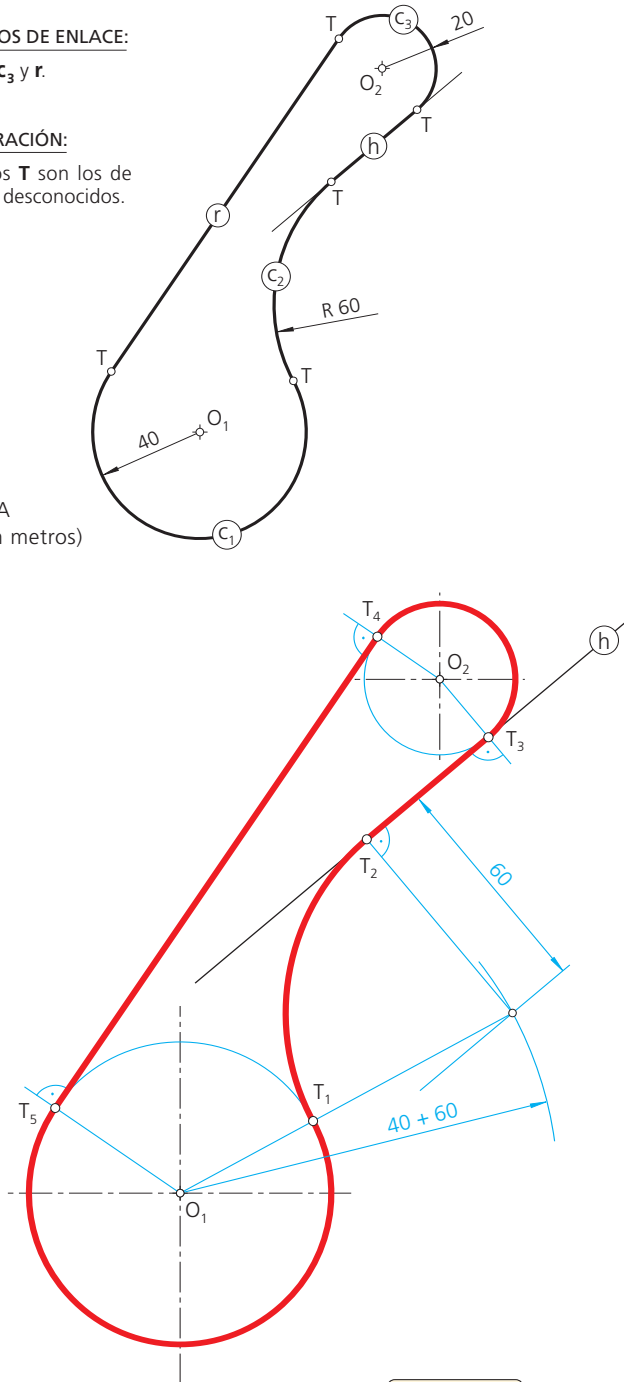
ELEMENTOS DE ENLACE:

c_1 , c_2 , h , c_3 y r .

CONSIDERACIÓN:

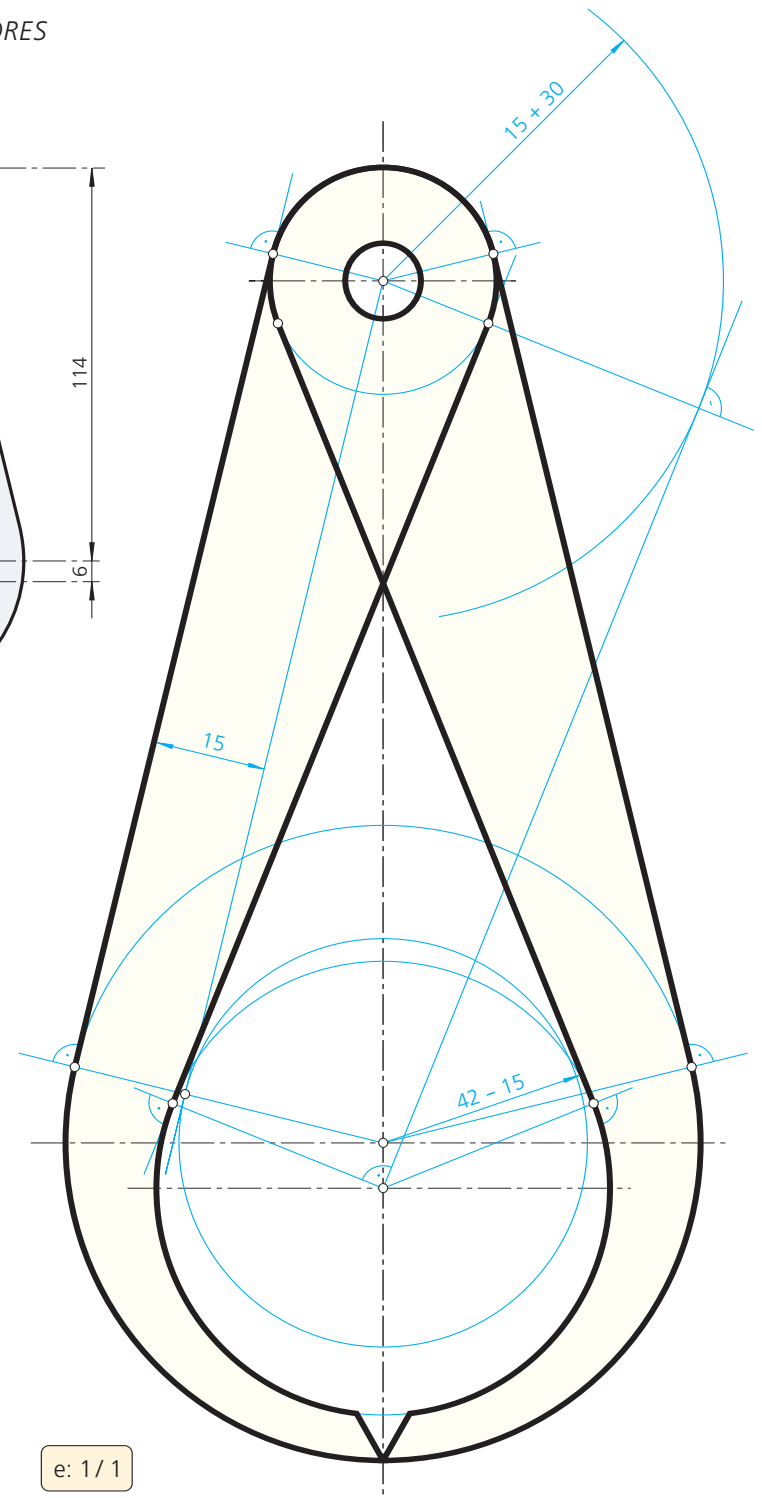
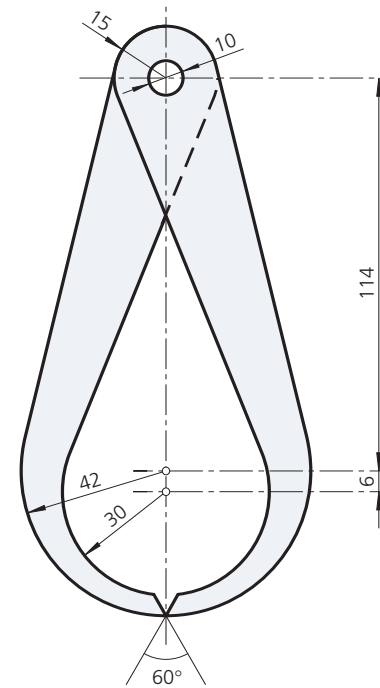
Los puntos **T** son los de tangencia desconocidos.

ESQUEMA
(Cotas en metros)



e: 1/2.000

2 COMPÁS DE ESPESORES

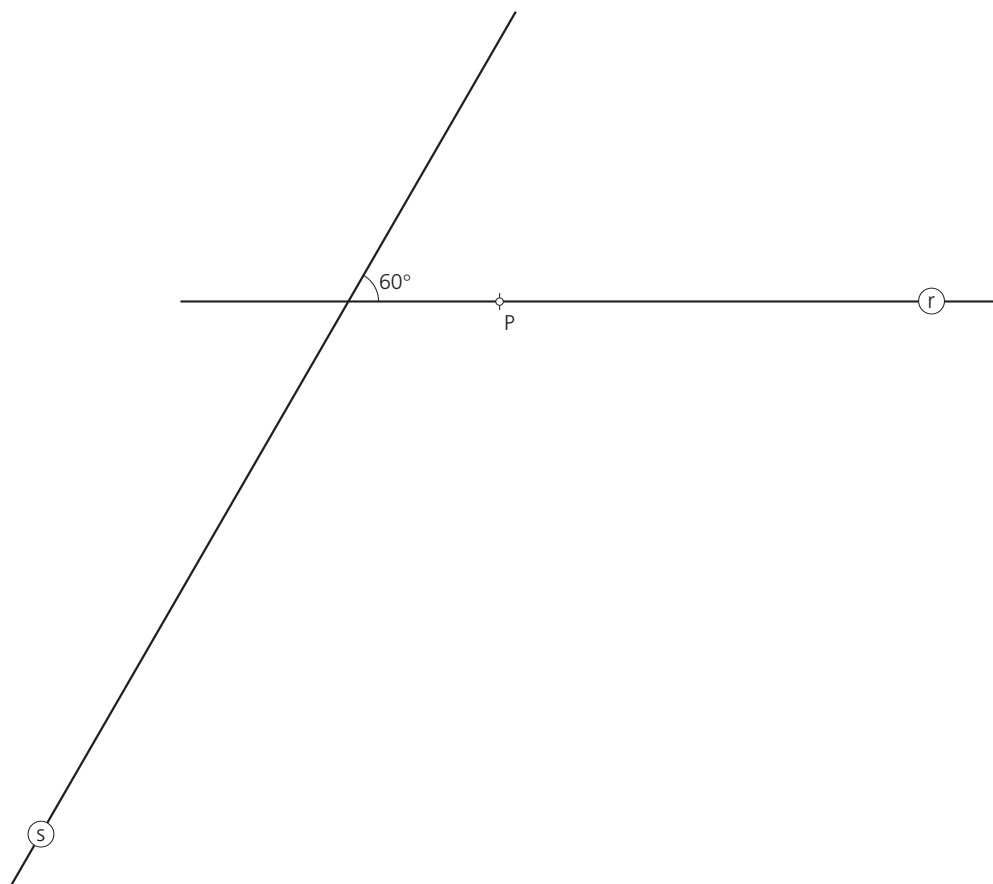


e: 1/1

VERIFICACIONES

1. ¿Cuándo se dice que **DOS CIRCUNFERENCIAS** son **TANGENTES**?
¿Qué **DOS TIPOS** de **TANGENCIAS** pueden producirse entre dos circunferencias?

2. Delinear las **CIRCUNFERENCIAS TANGENTES** a las rectas **r** y **s**, que se cortan formando un **ÁNGULO** de **60°**, de forma que la **TANGENCIA** a **r** se produzca en el punto **P**, a **20mm.** de la **INTERSECCIÓN** de ambas. Asimismo, se pide dibujar la **TERCERA RECTA TANGENTE** a ambas circunferencias solución. Señalar como siempre, y con toda precisión, los **PUNTOS DE CONTACTO**.

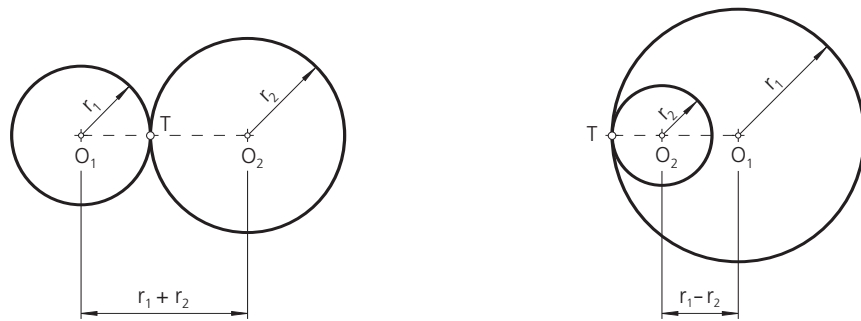


VERIFICACIONES

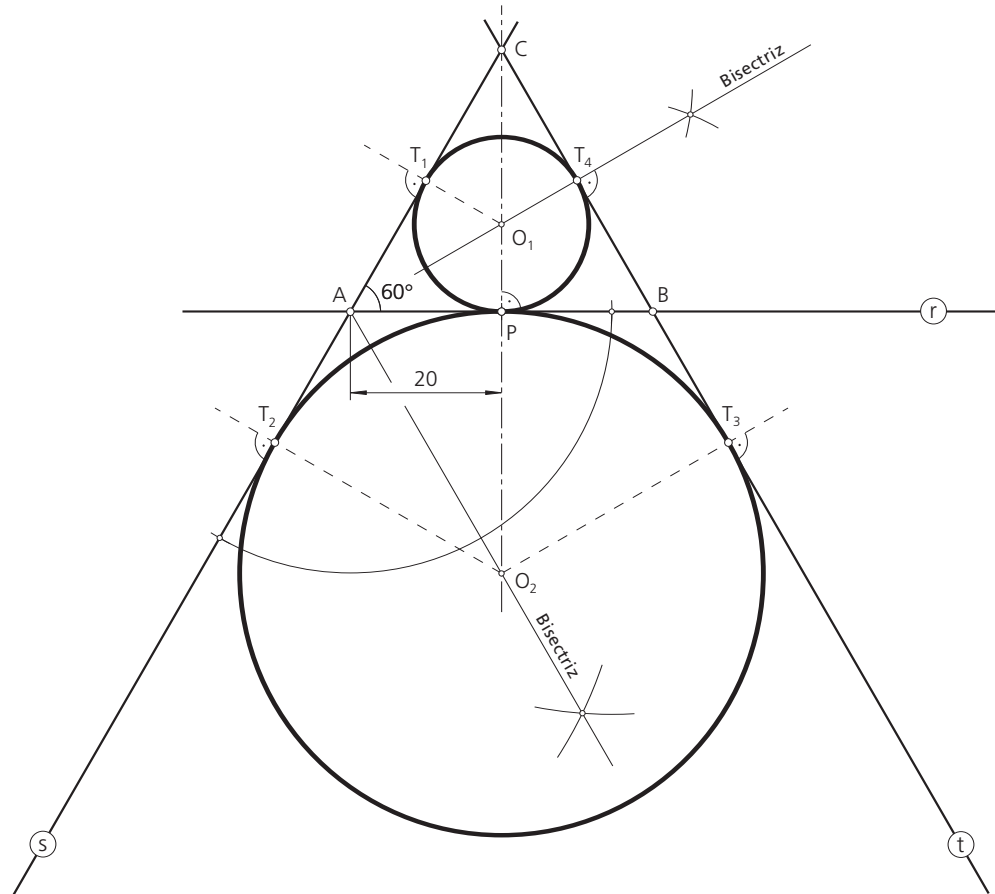
1. ¿Cuándo se dice que **DOS CIRCUNFERENCIAS** son **TANGENTES**?
 ¿Qué **DOS TIPOS** de **TANGENCIAS** pueden producirse entre dos circunferencias?

«Dos circunferencias son tangentes cuando tienen un punto en común que se encuentra alineado con los centros de ambas circunferencias».

Si las circunferencias son **tangentes exteriores** las distancias entre centros es igual a la suma de sus radios; si son **tangentes interiores** la distancia entre sus centros es igual a la diferencia de sus radios.



2. Delinear las **CIRCUNFERENCIAS TANGENTES** a las rectas **r** y **s**, que se cortan formando un **ÁNGULO** de **60°**, de forma que la **TANGENCIA** a **r** se produzca en el punto **P**, a **20mm.** de la **INTERSECCIÓN** de ambas. Asimismo, se pide dibujar la **TERCERA RECTA TANGENTE** a ambas circunferencias solución. Señalar como siempre, y con toda precisión, los **PUNTOS DE CONTACTO**.



CONSTRUCCIÓN

- Se sitúa el punto **P**, sobre la recta **r**, a **20 mm.** del vértice **A**.
- Los centros (**O₁** y **O₂**) de las dos circunferencias tangentes a ambas rectas, y concretamente en el punto **P** a **r**, se encuentran en la intersección de la perpendicular por **P** con las bisectrices de los ángulos (suplementarios) que ambas forman entre sí.
- Los puntos de tangencia **T₁**, **T₂**, **T₃** y **T₄** son los pies de las perpendiculares trazadas a las rectas **s** y **t**, respectivamente, por los centros **O₁** y **O₂**.

APLICACIONES DECORATIVAS DE ENLACES

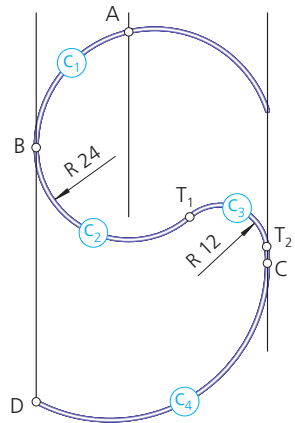
1. Si una marca comercial quiere registrar un LOGOTIPO, necesita, poseer una descripción inequívoca de sus características geométricas. La letra «S» de la figura pertenece a un logotipo y está definida por diversas condiciones de ENLACES entre ARCOS de CIRCUNFERENCIA en las que intervienen puntos, rectas y circunferencias. Representa la LETRA a la escala planteada, dejando constancia de las construcciones geométricas auxiliares.

2. La línea curva del esquema representa el CONTORNO de un PARTERRE, integrado en una extensa zona ajardinada, compuesto de SEIS ARCOS de circunferencia de radios desiguales. Cada arco es TANGENTE al anterior a él y al siguiente. Delinea, a escala 1/500, la CURVA CERRADA obteniendo, con todo rigor, los SEIS puntos de enlace de los arcos. Deja constancia de todas las construcciones geométricas auxiliares.

nombre y apellidos

nº curso/grupo fecha

1 LOGOTIPO



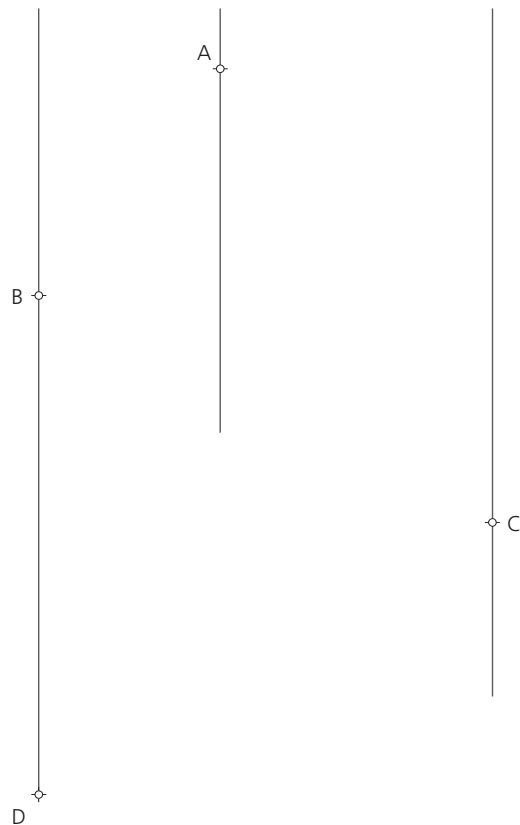
ARCOS DE ENLACE:

C_1 , C_2 , C_3 y C_4 .

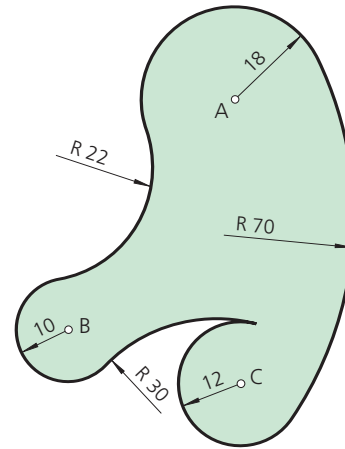
CONSIDERACIONES:

- C_1 y C_2 son tangentes a la recta vertical en el punto B.
- Para el arco C_4 el punto C es de tangencia con la recta vertical de la derecha.
- Los puntos T_1 y T_2 son los de tangencia o enlace desconocidos.

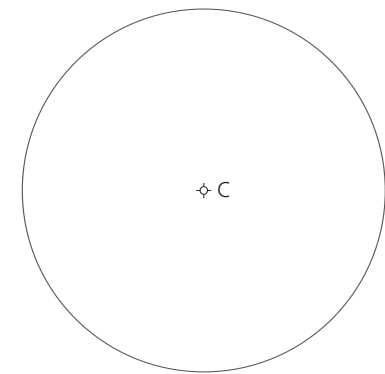
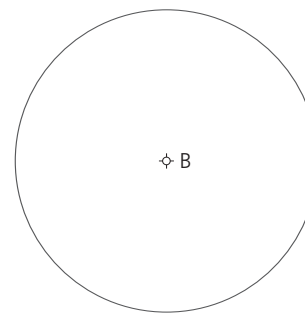
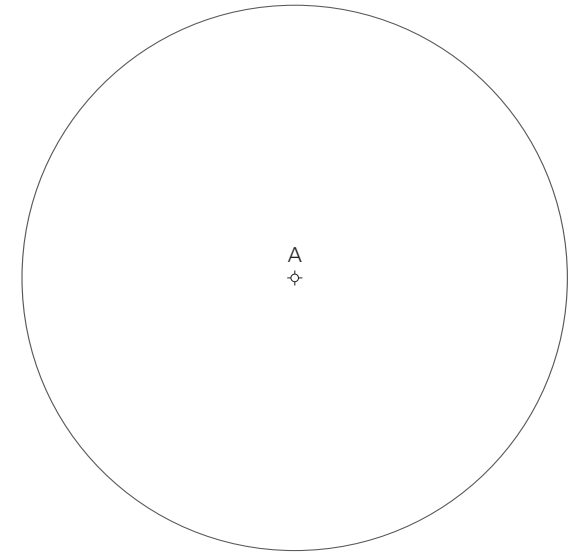
ESQUEMA DE ANÁLISIS
(Cotas en milímetros)



2 PARTERRE



ESQUEMA (Cotas en metros)



APLICACIONES DECORATIVAS DE ENLACES

1. Si una marca comercial quiere registrar un LOGOTIPO, necesita, poseer una descripción inequívoca de sus características geométricas. La letra «S» de la figura pertenece a un logotipo y está definida por diversas condiciones de ENLACES entre ARCOS de CIRCUNFERENCIA en las que intervienen puntos, rectas y circunferencias. Representa la LETRA a la escala planteada, dejando constancia de las construcciones geométricas auxiliares.

2. La línea curva del esquema representa el CONTORNO de un PARTERRE, integrado en una extensa zona ajardinada, compuesto de SEIS ARCOS de circunferencia de radios desiguales. Cada arco es TANGENTE al anterior a él y al siguiente. Delinea, a escala 1/500, la CURVA CERRADA obteniendo, con todo rigor, los SEIS puntos de enlace de los arcos. Deja constancia de todas las construcciones geométricas auxiliares.

nombre y apellidos

nº curso/grupo fecha

1 LOGOTIPO

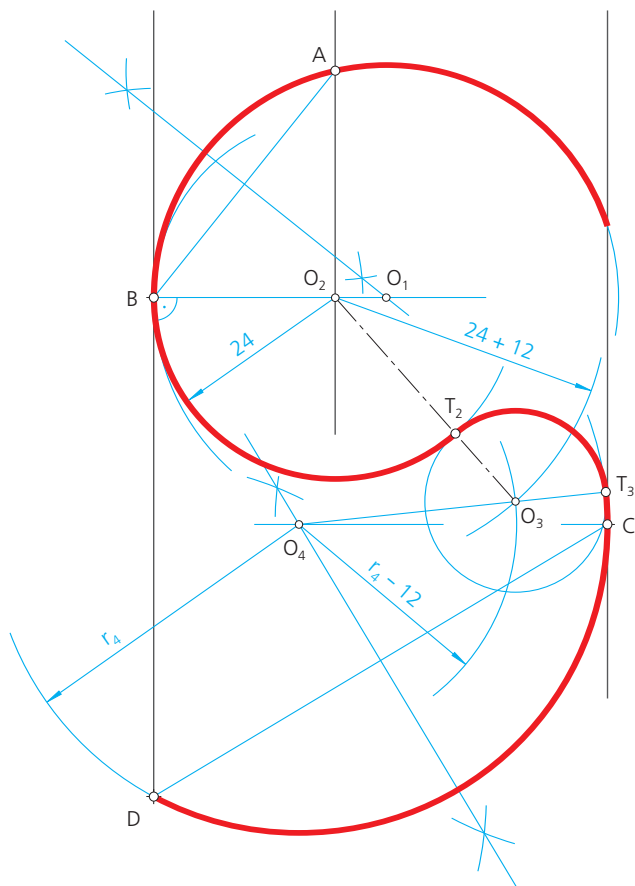
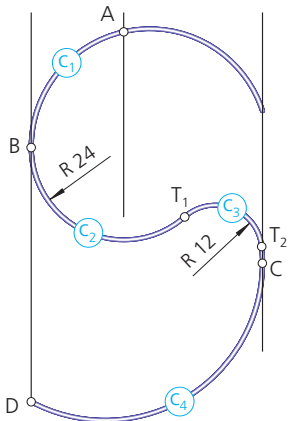
ARCOS DE ENLACE:

C_1 , C_2 , C_3 y C_4 .

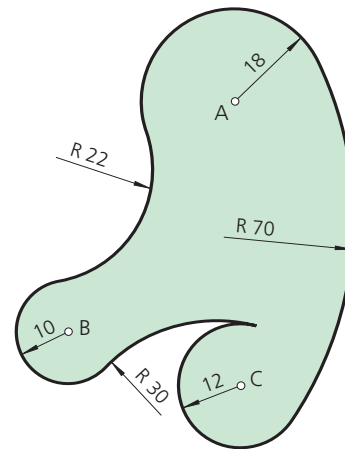
CONSIDERACIONES:

- C_1 y C_2 son tangentes a la recta vertical en el punto B.
- Para el arco C_4 el punto C es de tangencia con la recta vertical de la derecha.
- Los puntos T_1 y T_2 son los de tangencia o enlace desconocidos.

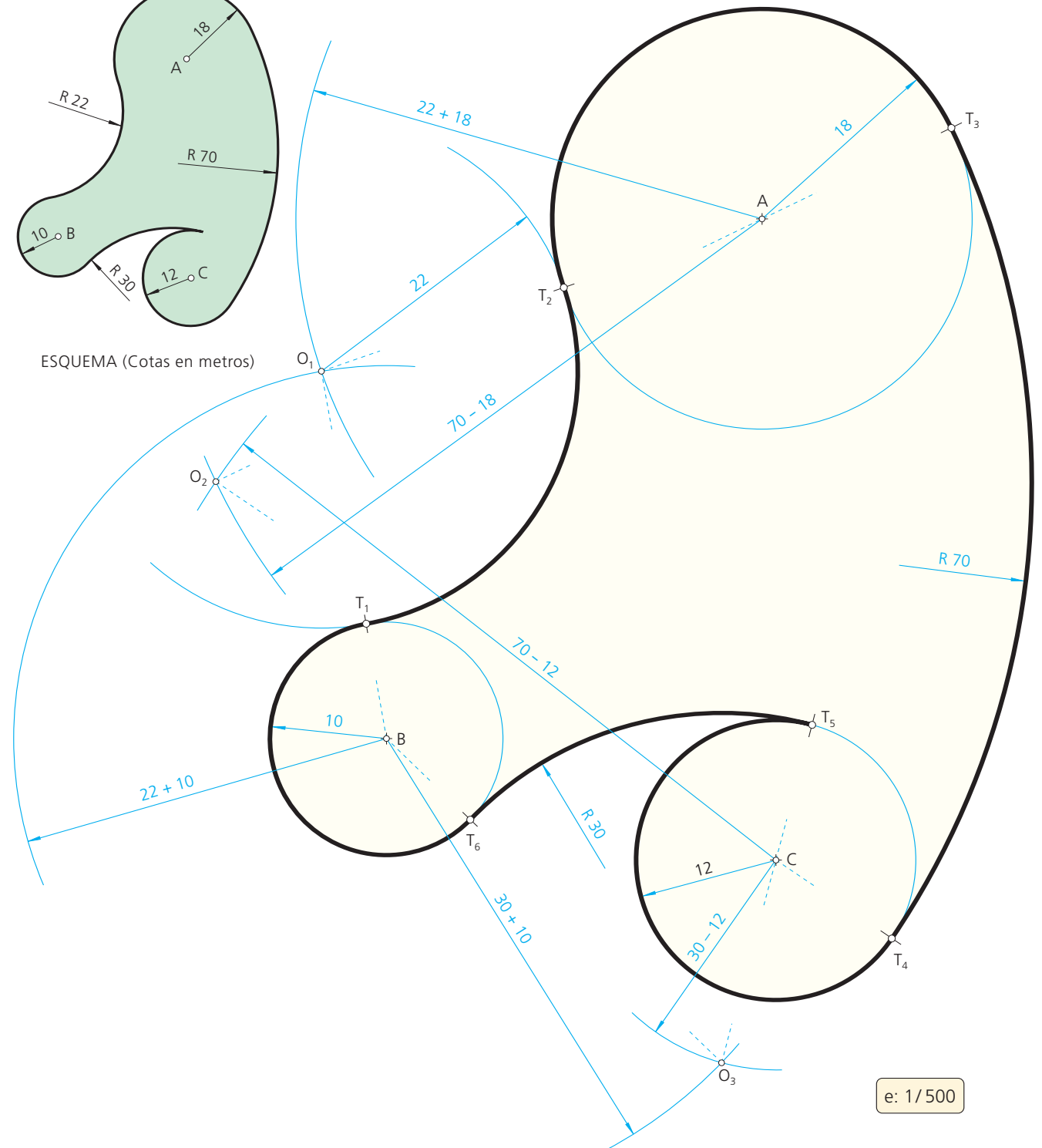
ESQUEMA DE ANÁLISIS
(Cotas en milímetros)



2 PARTERRE

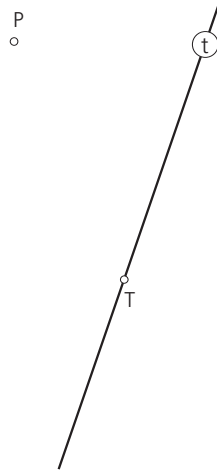


ESQUEMA (Cotas en metros)

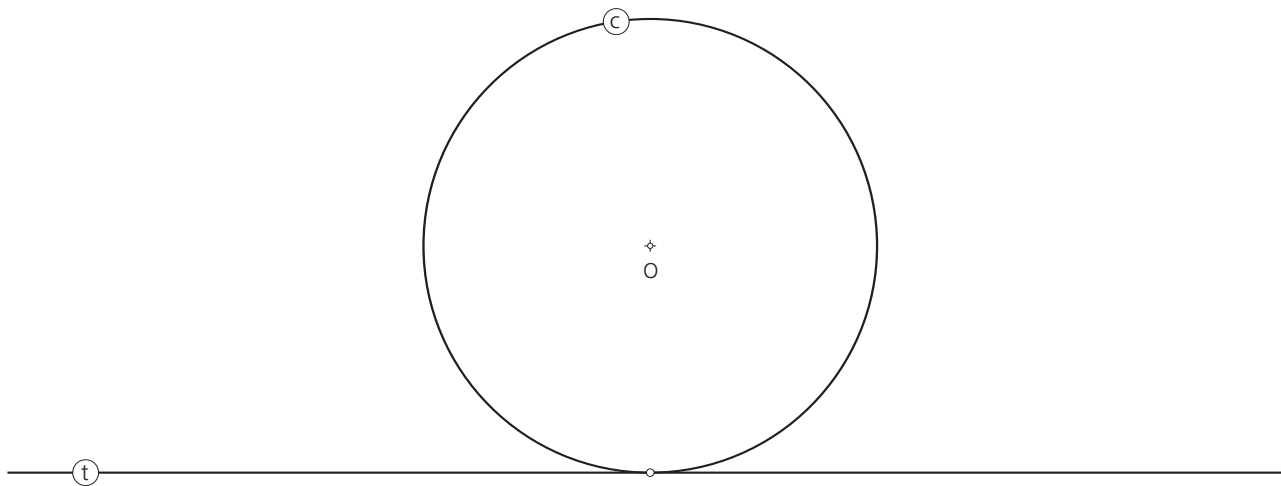


VERIFICACIONES

1. Dibujar la **CIRCUNFERENCIA TANGENTE** a la recta **t** en su punto **T** y que pase por un punto exterior **P**.

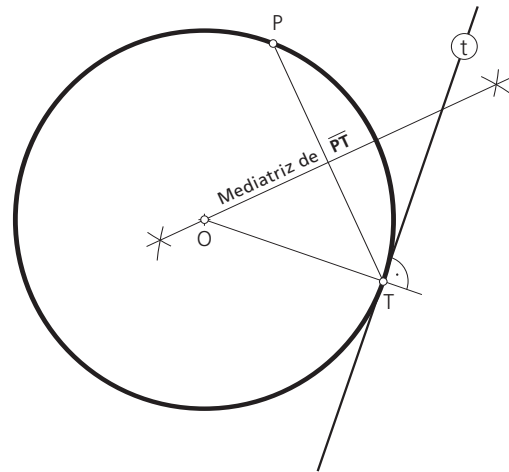


2. Dada la **CIRCUNFERENCIA c** y la **RECTA t** representadas en la figura adjunta, se pide:
Dibujar **DOS CIRCUNFERENCIAS CONCÉNTRICAS** de radios **10 mm.** y **20 mm.** respectivamente, tal que la **MENOR** sea **TANGENTE** a la **RECTA t** y la **MAYOR** lo sea a la **CIRCUNFERENCIA c** dada. Señalar, como de costumbre, con toda precisión, los **PUNTOS DE TANGENCIA** e indicar, gráficamente, el **NÚMERO DE SOLUCIONES** que pueden plantearse.

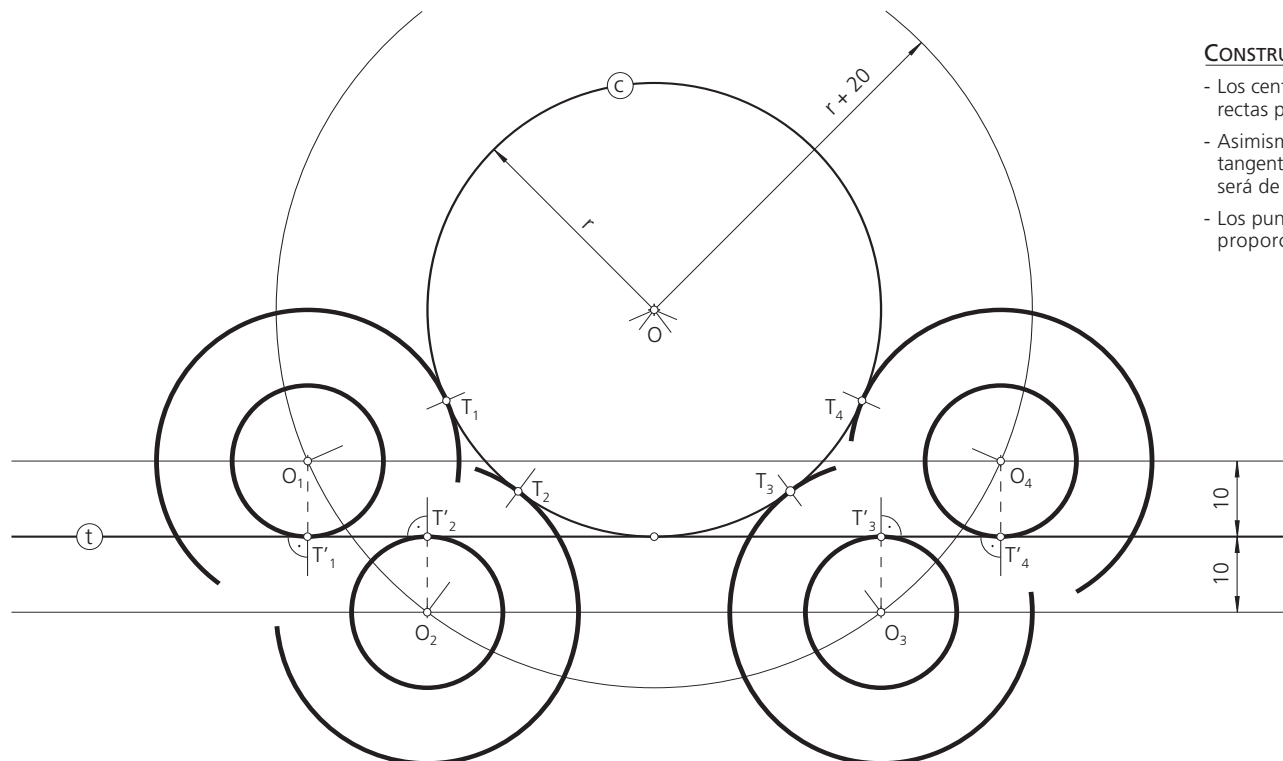


VERIFICACIONES

1. Dibujar la **CIRCUNFERENCIA TANGENTE** a la recta **t** en su punto **T** y que pase por un punto exterior **P**.



2. Dada la **CIRCUNFERENCIA c** y la **RECTA t** representadas en la figura adjunta, se pide:
Dibujar **DOS CIRCUNFERENCIAS CONCÉNTRICAS** de radios **10 mm.** y **20 mm.** respectivamente, tal que la **MENOR** sea **TANGENTE** a la **RECTA t** y la **MAYOR** lo sea a la **CIRCUNFERENCIA c** dada. Señalar, como de costumbre, con toda precisión, los **PUNTOS DE TANGENCIA** e indicar, gráficamente, el **NÚMERO DE SOLUCIONES** que pueden plantearse.



CONSTRUCCIÓN

- Los centros de las circunferencias solución tangentes a la recta **t**, estarán situados en rectas paralelas a **t** distantes el radio de la circunferencia menor (**10 mm.**).
- Asimismo, y dado que las circunferencias mayores (de radio **20 mm.**) han de ser tangentes a la circunferencia dada la distancia entre sus centros (tangentes exteriores) será de **$r + 20$** .
- Los puntos comunes a los lugares geométricos descritos en los apartados anteriores proporcionan los centros **O₁**, **O₂**, **O₃** y **O₄** de las cuatro posibles soluciones.

MOTIVOS ORNAMENTALES CON PREDOMINIO DE ENLACES

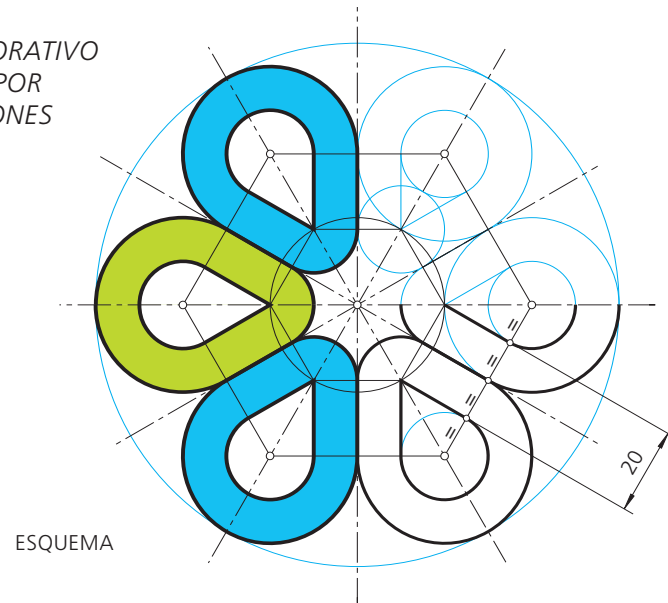
1. La figura croquizada representa un diseño compuesto por ENLACES de RECTAS con ARCOS de CIRCUNFERENCIA y de éstas entre sí. Delinea, a escala 1/1, el MODELO presentado. En el análisis de la figura se ha de considerar, como dato único, que la magnitud del LADO del HEXÁGONO REGULAR INTERIOR es de 20 mm. Obsérvese que el hexágono, cuyos vértices son centros de las circunferencias principales de los medallones, tiene, necesariamente, 40 mm. de lado.

2. En una circunferencia se inscriben dos triángulos equiláteros formando una ESTRELLA REGULAR de SEIS PUNTAS. Para dibujar el motivo serpenteante se centra el compás en los puntos A para describir los arcos mayores, que luego enlazan con los menores, de centro los puntos B. DATOS: - Diámetro de la circunferencia circunscrita: 120 mm. - Radio de los arcos menores: $r = 10$ mm. - Ancho de la lacería: 5 mm.

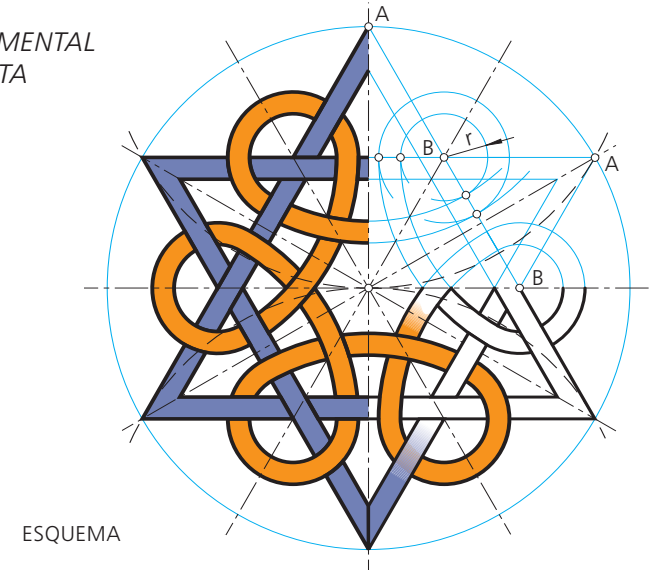
nombre y apellidos

nº	curso/grupo	fecha

1 MOTIVO DECORATIVO COMPUESTO POR SEIS MEDALLONES



2 LACERÍA ORNAMENTAL DE ORIGEN CELTA



MOTIVOS ORNAMENTALES CON PREDOMINIO DE ENLACES

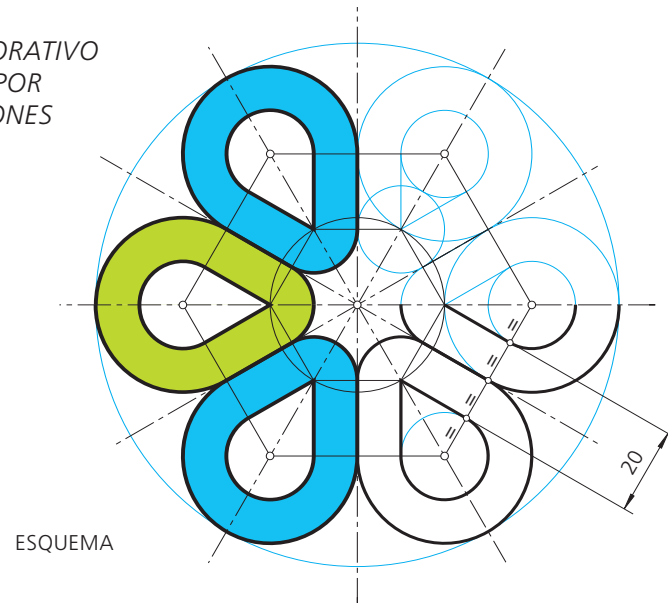
1. La figura croquizada representa un diseño compuesto por ENLACES de RECTAS con ARCOS de CIRCUNFERENCIA y de éstas entre sí. Delinea, a escala 1/1, el MODELO presentado. En el análisis de la figura se ha de considerar, como dato único, que la magnitud del LADO del HEXÁGONO REGULAR INTERIOR es de 20 mm. Obsérvese que el hexágono, cuyos vértices son centros de las circunferencias principales de los medallones, tiene, necesariamente, 40 mm. de lado.

2. En una circunferencia se inscriben dos triángulos equiláteros formando una ESTRELLA REGULAR de SEIS PUNTAS. Para dibujar el motivo serpenteante se centra el compás en los puntos A para describir los arcos mayores, que luego enlazan con los menores, de centro los puntos B. DATOS: - Diámetro de la circunferencia circunscrita: 120 mm. - Radio de los arcos menores: $r = 10$ mm. - Ancho de la lacería: 5 mm.

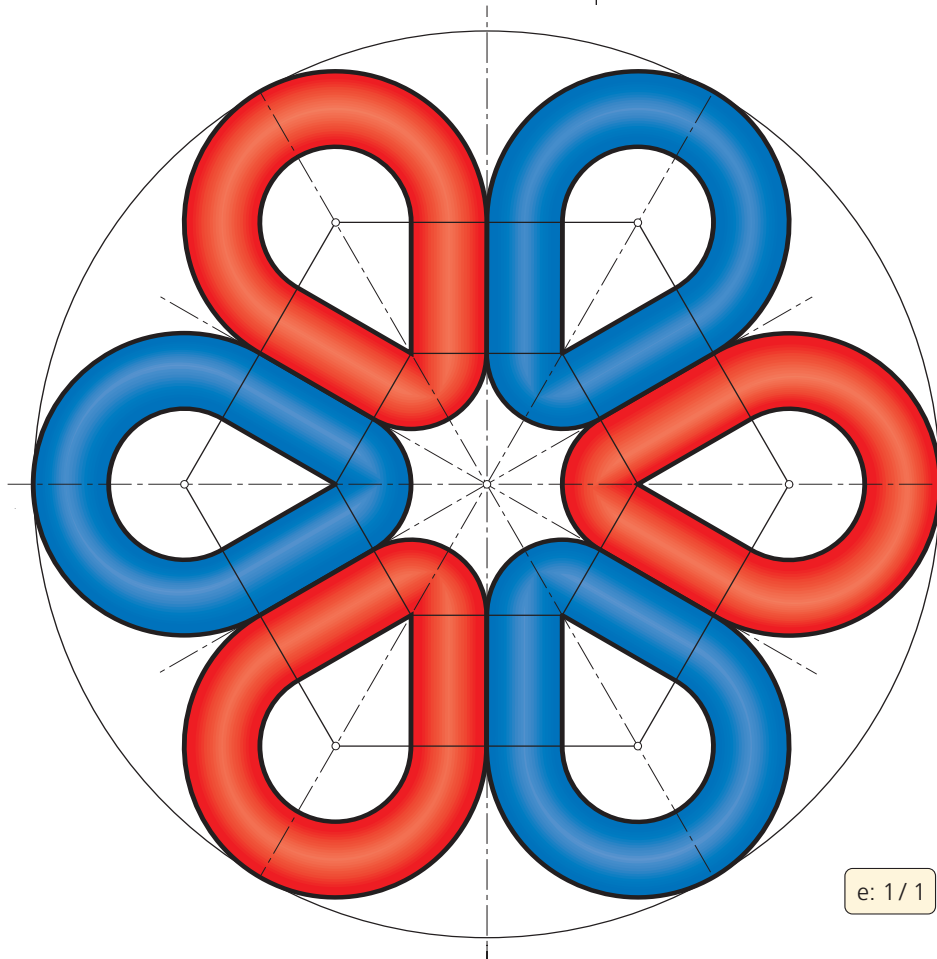
nombre y apellidos _____

nº _____	curso/grupo _____	fecha _____
----------	-------------------	-------------

1 MOTIVO DECORATIVO COMPUESTO POR SEIS MEDALLONES

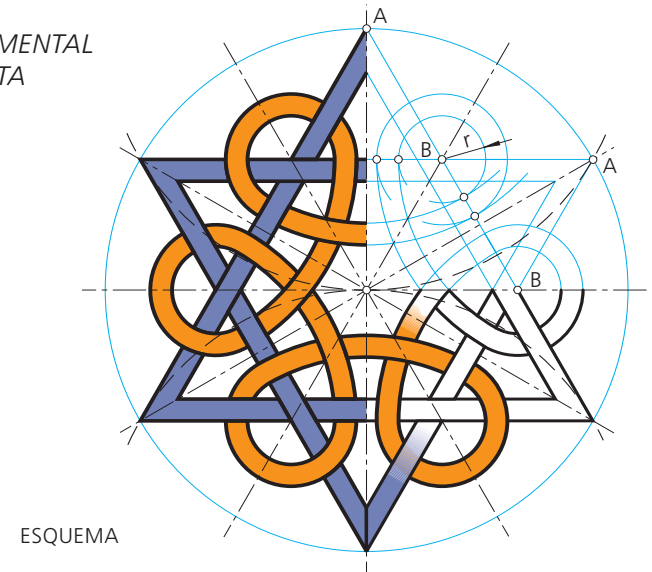


ESQUEMA



e: 1/1

2 LACERÍA ORNAMENTAL DE ORIGEN CELTA



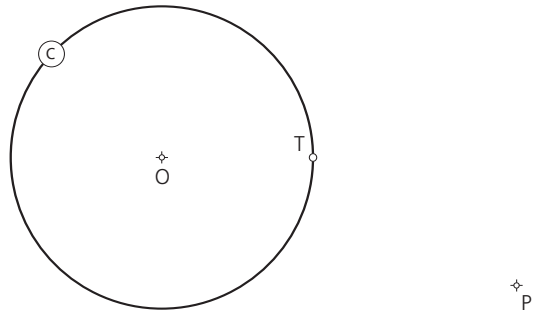
ESQUEMA



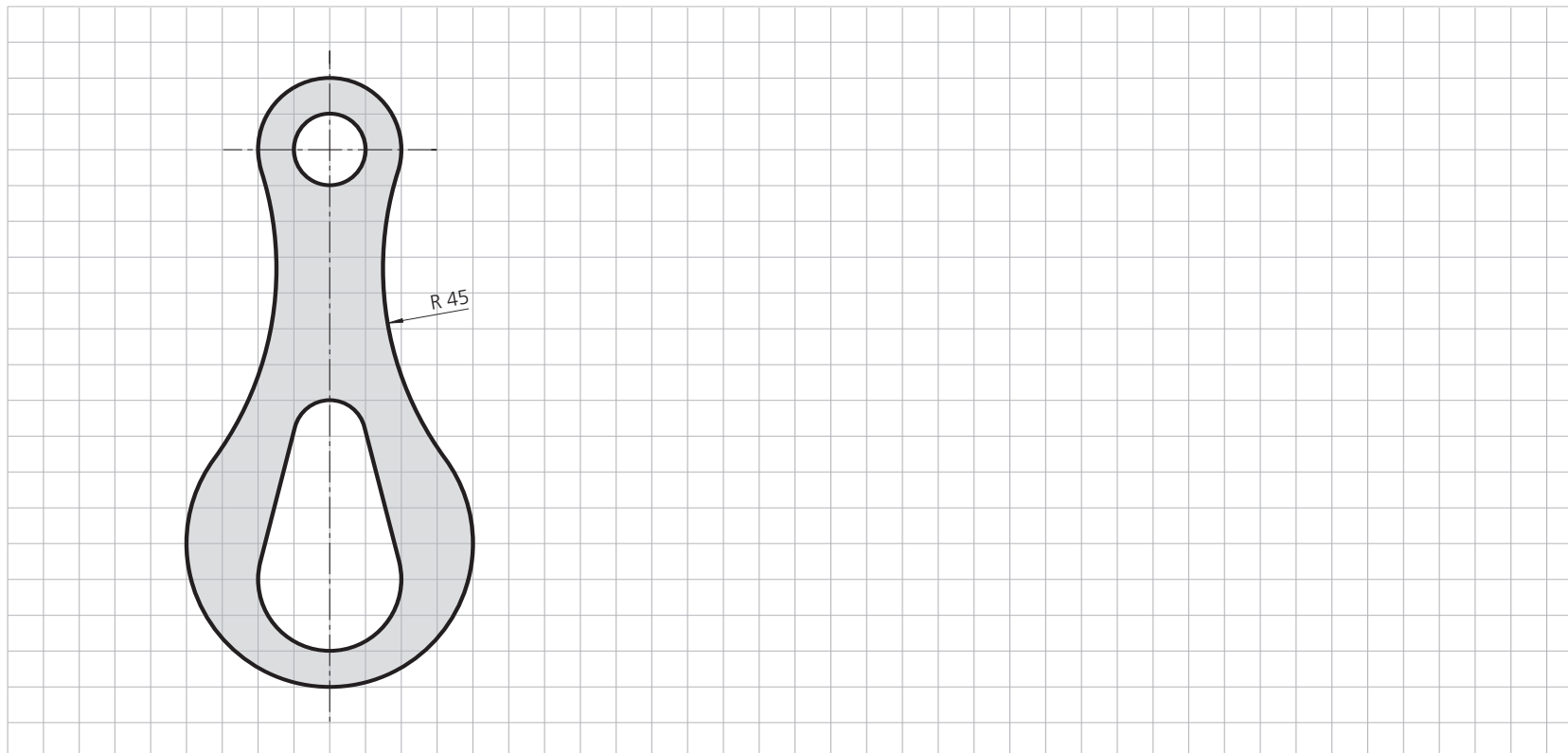
e: 1/1

VERIFICACIONES

1. Dibujar la **CIRCUNFERENCIA TANGENTE** a la **CIRCUNFERENCIA c**, de centro **O**, conocido el **PUNTO T** donde se produce el **CONTACTO**, sabiendo que debe pasar asimismo por el **PUNTO EXTERIOR P**.

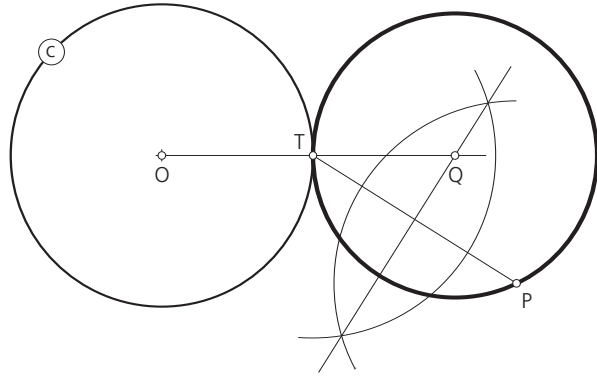


2. Analizar la **FIGURA** con el **COMPÁS** y delinear, a escala natural, el **CONTORNO** de la misma, considerando la cuadrícula de 5 mm. Dejar visible, con **LÍNEA FINA**, todas las **CONSTRUCCIONES AUXILIARES** y señalar los **PUNTOS** exactos de **TANGENCIA** entre **RECTAS** y **CIRCUNFERENCIAS** y de éstas entre sí.

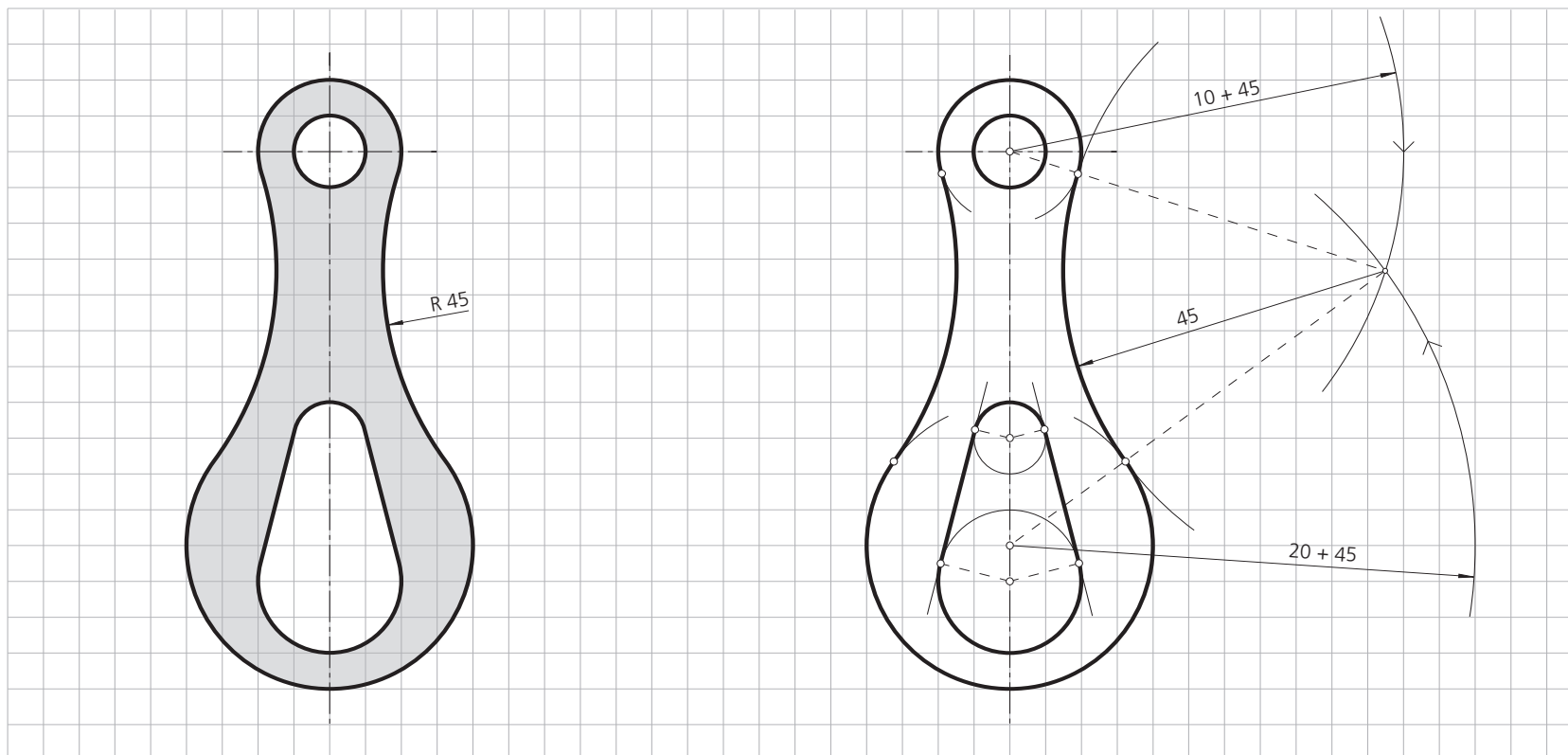


VERIFICACIONES

1. Dibujar la **CIRCUNFERENCIA TANGENTE** a la **CIRCUNFERENCIA c**, de centro **O**, conocido el **PUNTO T** donde se produce el **CONTACTO**, sabiendo que debe pasar asimismo por el **PUNTO EXTERIOR P**.



2. Analizar la **FIGURA** con el **COMPÁS** y delinear, a escala natural, el **CONTORNO** de la misma, considerando la cuadrícula de 5 mm. Dejar visible, con **LÍNEA FINA**, todas las **CONSTRUCCIONES AUXILIARES** y señalar los **PUNTOS** exactos de **TANGENCIA** entre **RECTAS** y **CIRCUNFERENCIAS** y de éstas entre sí.



ENLACE ORNAMENTAL CON ENTRELAZADOS EN FORMA DE OCHO

En el ámbito del diseño es muy frecuente encontrarse con perfiles o contornos en los que se alternan **LÍNEAS RECTAS** y líneas **CURVAS** compuestas por **ARCOS** de **CIRCUNFERENCIA**. Tales configuraciones exigen el conocimiento y dominio del trazado de **TANGENTES** de forma que su resolución gráfica no implique una limitación del diseño.
Delinea, a escala **1/1**, el **MODELO** presentado considerando como

único dato el **RADIO** de **10 mm.** indicado en el esquema adjunto.

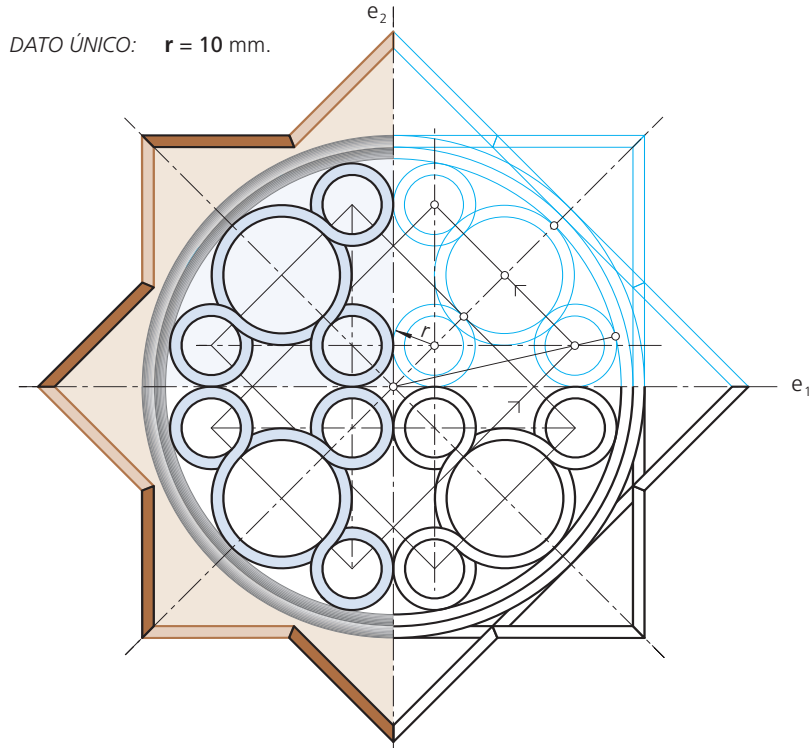
NOTA.- Antes de comenzar los trazados, **ANALIZA** detenidamente el diseño de simetrías, ángulos, etc., que condicionan la situación del entrelazado de ochos y la conjunción de líneas que se aprecia en el dibujo. Entre otras vías de solución puede seguirse el esquema de partida que se indica, paso a paso, en la parte inferior.

nombre y apellidos

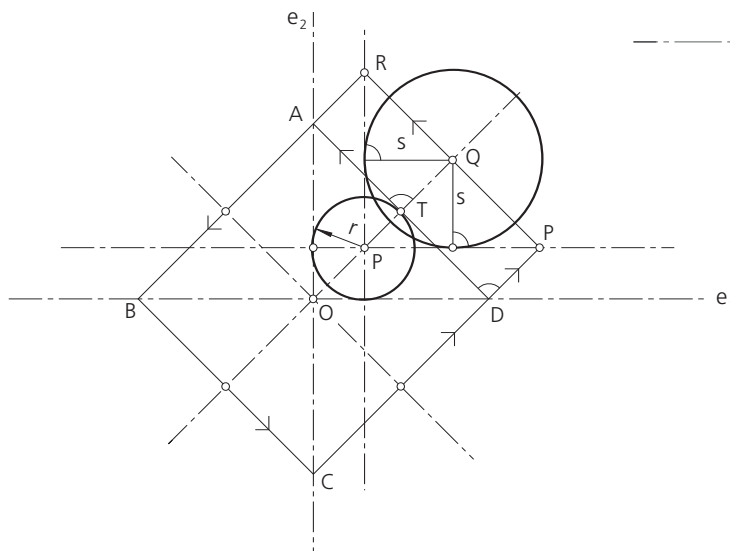
nº

curso/grupo

fecha



ESQUEMA BASE

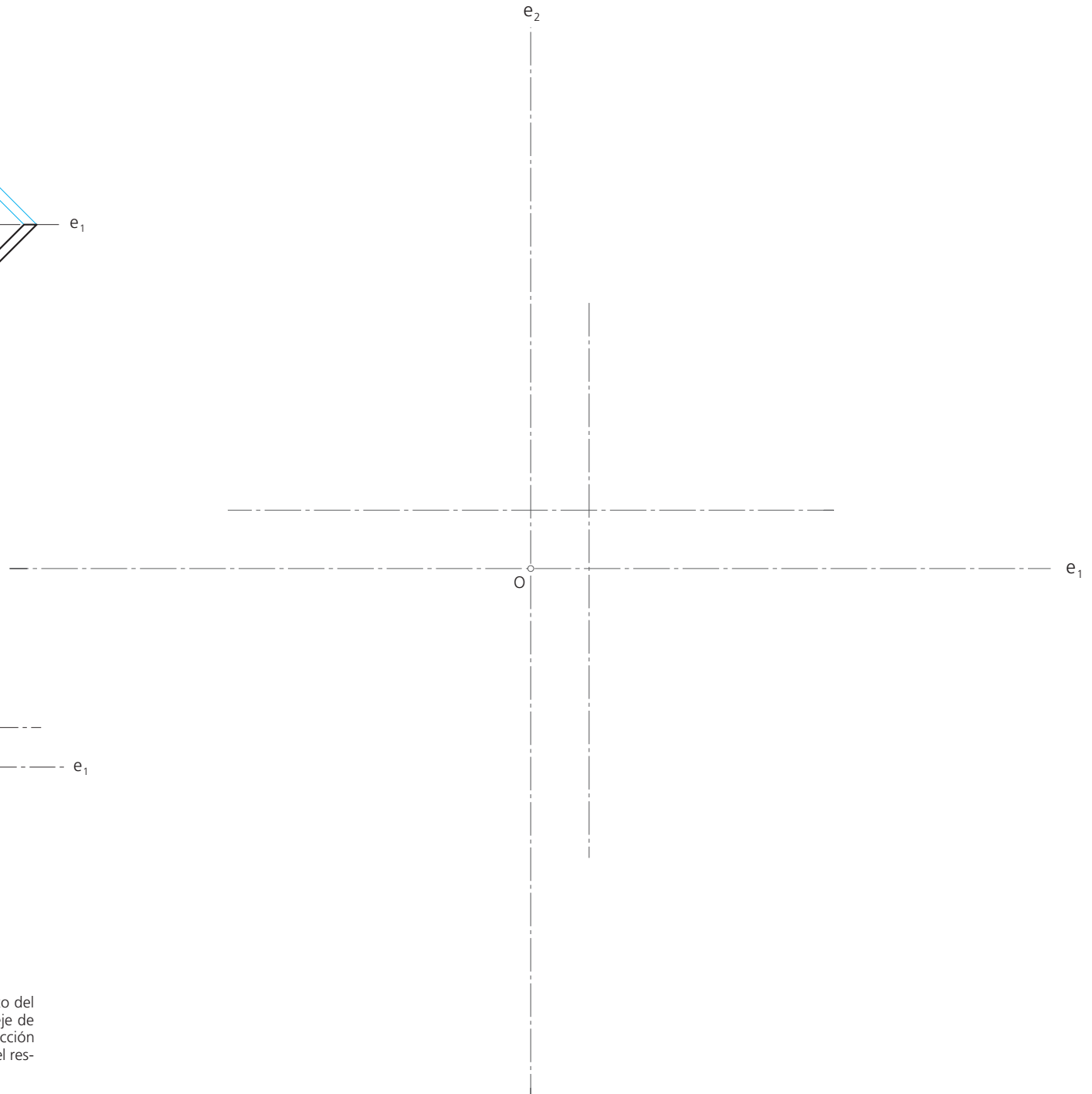


INICIO DE LA CONSTRUCCIÓN

PASO 1. Se traza la circunferencia de centro **P** y radio $r = 10 \text{ mm.}$ (único dato del diseño), obteniendo el punto de tangencia **T** (por el que pasa un eje de simetría de la composición decorativa), haciendo posible la construcción del cuadrado **ABCD** y la obtención de los puntos **P**, **Q** y **R**, centros del resto de las circunferencias contenidas en el cuadrante derecho.

PASO 2. Con centro en los puntos **P**, **Q** y **R** se dibujan el resto de las circunferencias, considerando sus tangencias y el radio **s** de la mayor de ellas, obtenido como distancia del centro **Q** a la recta o rectas a que es tangente.

COMPOSICIÓN DECORATIVA CON ENTRELAZADO DE OCHOS



ENLACE ORNAMENTAL CON ENTRELAZADOS EN FORMA DE OCHO

En el ámbito del diseño es muy frecuente encontrarse con perfiles o contornos en los que se alternan **LÍNEAS RECTAS** y líneas **CURVAS** compuestas por **ARCOS** de **CIRCUNFERENCIA**. Tales configuraciones exigen el conocimiento y dominio del trazado de **TANGENTES** de forma que su resolución gráfica no implique una limitación del diseño.

Delinea, a escala **1/1**, el **MODELO** presentado considerando como

único dato el **RADIO** de **10 mm.** indicado en el esquema adjunto.

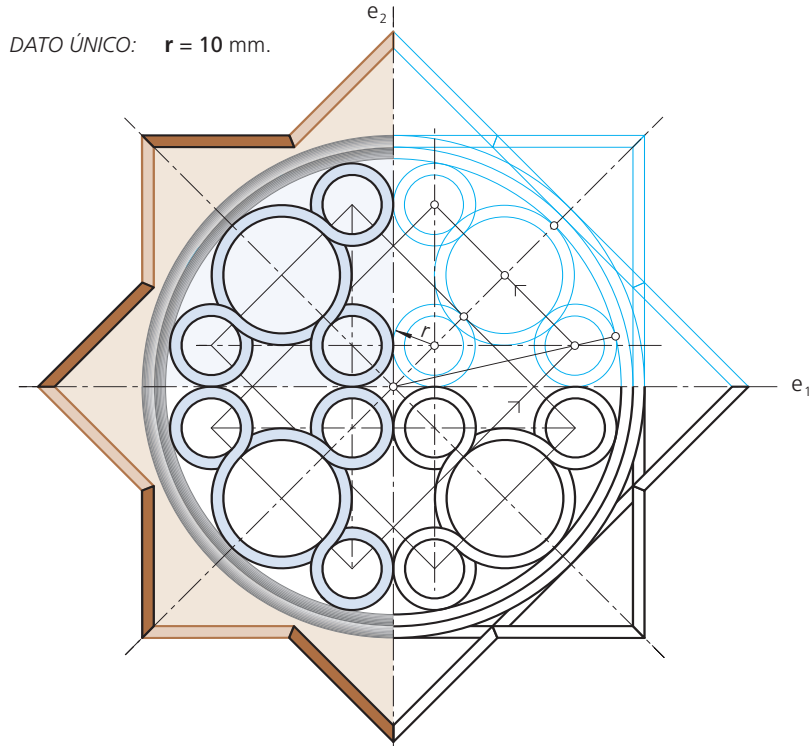
NOTA.- Antes de comenzar los trazados, **ANALIZA** detenidamente el diseño de simetrías, ángulos, etc., que condicionan la situación del entrelazado de ochos y la conjunción de líneas que se aprecia en el dibujo. Entre otras vías de solución puede seguirse el esquema de partida que se indica, paso a paso, en la parte inferior.

nombre y apellidos

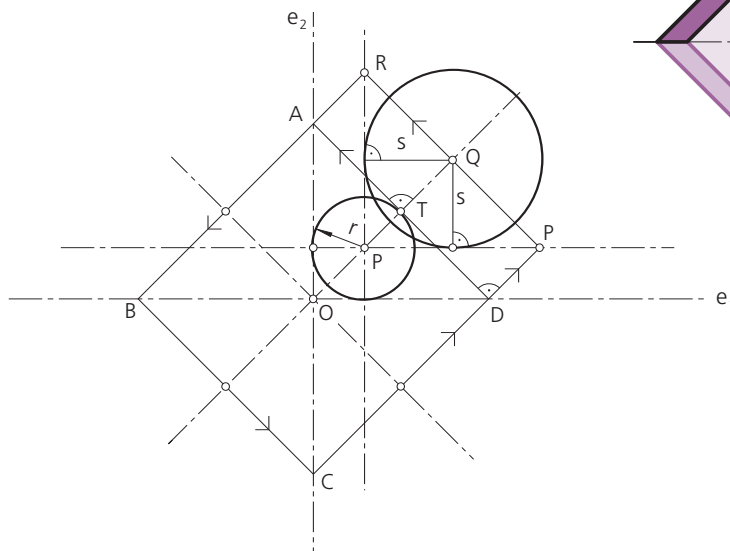
nº

curso/grupo

fecha



ESQUEMA BASE



INICIO DE LA CONSTRUCCIÓN

PASO 1. Se traza la circunferencia de centro **P** y radio $r = 10 \text{ mm.}$ (único dato del diseño), obteniendo el punto de tangencia **T** (por el que pasa un eje de simetría de la composición decorativa), haciendo posible la construcción del cuadrado **ABCD** y la obtención de los puntos **P**, **Q** y **R**, centros del resto de las circunferencias contenidas en el cuadrante derecho.

PASO 2. Con centro en los puntos **P**, **Q** y **R** se dibujan el resto de las circunferencias, considerando sus tangencias y el radio **s** de la mayor de ellas, obtenido como distancia del centro **Q** a la recta o rectas a que es tangente.

COMPOSICIÓN DECORATIVA CON ENTRELAZADO DE OCHOS

